

Kurze Homotopien in hyperbolischen Räumen

Dissertation

zur

Erlangung der naturwissenschaftlichen Doktorwürde
(Dr. sc. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Universität Zürich

von

Deborah Ruoss

von

Schübelbach SZ

Promotionskomitee

Prof. Dr. Viktor Schroeder (Leitung der Dissertation)

Prof. Dr. Thomas Kappeler

Prof. Dr. James Howie

Zürich 2005

Zusammenfassung

Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass die universelle Überlagerung X von M Gromov-hyperbolisch ist. Seien G ein endlicher, zusammenhängender metrischer Graph und $u, v : G \rightarrow M$ stetig und homotop. Dann gibt es eine Homotopie zwischen u und v , deren Länge beschränkt ist durch eine lineare Funktion in $L(u) + L(v)$ mit Koeffizienten, welche nur von der Dimension, dem Durchmesser, dem Injektivitätsradius und den Krümmungsschranken von M sowie der Hyperbolizitätskonstante von X abhängen.

Abstract

Let M be a compact Riemannian manifold such that its universal cover X is Gromov hyperbolic, G a finite, connected metric graph, and $u, v : G \rightarrow M$ continuous and homotopic. Then there exists a homotopy between u and v with length bounded by a linear map in $L(u) + L(v)$, where the coefficients depend only on the dimension, the diameter, the injectivity radius, and the curvature bounds of M , as well as the hyperbolicity constant of X .

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	2
1	Gromov-hyperbolische Räume	7
1.1	δ -Hyperbolizität	7
1.2	Quasi-Geodäten und Quasi-Isometrien	10
1.3	Rand eines hyperbolischen Raumes	11
1.4	Center	13
1.5	Hyperbolische Gruppen	13
1.6	Isometrien	15
1.7	Auseinanderlaufen von Geodäten	18
2	Achsen von hyperbolischen Isometrien	21
2.1	Quasi-Achsen	22
2.2	Achsen	26
3	Vorbereitungen für den Beweis von Satz 0.2	39
3.1	Projektion auf Mengen mit kleiner Verschiebung	39
3.2	Projektion auf Achsen	42
3.3	Häufungsargument	43
4	Beweis von Satz 0.2	46
4.1	Nur elliptische Isometrien	46
4.2	Fixpunkte von hyperbolischen Isometrien auf dem Rand . . .	50
4.3	γ_1, γ_2 hyperbolisch mit $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} \cap \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\} = \emptyset$	53
4.4	γ hyperbolisch, α elliptisch mit $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} \cap \{\gamma^+, \gamma^-\} = \emptyset$.	57
4.5	γ hyperbolisch, α elliptisch mit $\alpha(\gamma^+) = \gamma^-$ und $\alpha(\gamma^-) = \gamma^+$.	62
4.6	Alle Isometrien mit denselben Fixpunkten auf dem Rand . . .	64
4.7	Satz 0.2 für Mannigfaltigkeiten	67
5	Homotopien	69
5.1	Beweis von Satz 0.1	69
5.2	Kürzeste Repräsentanten von Homotopieklassen von Loops . .	77
A	Kompaktheitsargumente	84
	Literatur	98

0 Einleitung

Seien G ein endlicher, zusammenhängender metrischer Graph und $M = X/\Gamma$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung X und Decktransformationsgruppe Γ . Ist $u : G \rightarrow M$ stetig, so ist $L(u|_e)$ für jede Kante e von G die Länge von u eingeschränkt auf e . Man definiert die Länge $L(u)$ als Summe über alle diese Längen. $u : G \rightarrow M$ heisst C^1 -differenzierbar, wenn die Einschränkung von u auf jede Kante C^1 -differenzierbar ist.

Kappeler, Kuksin, Schroeder zeigen in [KKS, Theorem 0.1]: *Seien $\kappa, \varrho > 0$. M habe Krümmung $K_M \leq -\kappa$ und Injektivitätsradius $\text{inj}(M) \geq \varrho$. Seien $u, v : G \rightarrow M$ homotope C^1 -Abbildungen, welche nicht in der trivialen Homotopieklasse sind. Dann gibt es eine C^1 -Homotopie $A : G \times [0, 1] \rightarrow M$ von u nach v mit*

$$\sup_{t \in G} L(s \mapsto A(t, s)) \leq 3 \cdot [L(u) + L(v)] + C(\kappa, \varrho/20),$$

wobei $C(\kappa, \varepsilon) := 8 \text{sh}_\kappa^{-1}(1) + 8 \text{sh}_\kappa^{-1}(1/\text{sh}_\kappa(\varepsilon))$ und $\text{sh}_\kappa(\varepsilon) := \sinh(\sqrt{\kappa} \varepsilon)$.

Das Ergebnis der vorliegenden Dissertation ist eine Verallgemeinerung dieses Resultats auf kompakte Mannigfaltigkeiten mit Gromov-hyperbolischer universeller Überlagerung. Dabei werden beliebige stetige, nicht notwendigerweise C^1 -differenzierbare Abbildungen zugelassen. Man erhält keine konkreten Konstanten wie in [KKS], die Abschätzung ist aber linear in $L(u) + L(v)$.

Satz 0.1. *Seien $N \in \mathbb{N}^*$, $D, \varrho, \delta > 0$, $\kappa_1 \leq \kappa_2 \in \mathbb{R}$. Sei M eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Durchmesser $\text{diam}(M) \leq D$, Injektivitätsradius $\text{inj}(M) \geq \varrho$ und Krümmung $\kappa_1 \leq K_M \leq \kappa_2$, so dass die universelle Überlagerung X von M δ -hyperbolisch ist. Seien G ein endlicher, zusammenhängender metrischer Graph und $u, v : G \rightarrow M$ stetig und homotop. Dann gibt es eine Homotopie $A : G \times [0, 1] \rightarrow M$ von u nach v mit*

$$\sup_{t \in G} L(s \mapsto A(t, s)) \leq \mathcal{B} \cdot [L(u) + L(v)] + \mathcal{B},$$

wobei die Konstante $\mathcal{B} = \mathcal{B}(N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta) \in \mathbb{R}_+$ nur von $N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2$ und δ abhängt.

Um Satz 0.1 zu beweisen, untersucht man die Decktransformationsgruppe Γ von X . Sind Isometrien $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ gegeben, benötigt man eine Abschätzung des Durchmessers von Mengen mit kleiner Verschiebung unter $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ modulo deren Zentralisator. Dies entspricht Proposition 1.5 in [KKS]. Wir beweisen diese Abschätzung für eine grössere Klasse von Räumen, welche nicht notwendig mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen sind.

Satz 0.2. *Seien $D, \delta > 0$, X ein eigentlicher, geodätischer, δ -hyperbolischer Raum und Γ eine Gruppe, welche frei, total diskontinuierlich, durch Isometrien und kokompakt auf X operiert mit $\text{diam}(X/\Gamma) \leq D$. Sei $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung mit $\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \Omega(r)$ für alle $r \geq 0$ und $y, z \in X$. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ und $x, y \in X$. Dann gibt es $\sigma \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit*

$$d(x, \sigma y) \leq \mathcal{B} \cdot \max_{i=1, \dots, n} d(x, \gamma_i x) + \mathcal{B} \cdot \max_{i=1, \dots, n} d(y, \gamma_i y) + \mathcal{B},$$

wobei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega, D, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Satz 0.1 wird mit Hilfe von Satz 0.2 ähnlich wie in [KKS] bewiesen. Man konstruiert allerdings nicht direkt eine Homotopie aus kürzesten Geodäten, sondern setzt geeignete kleinere Homotopien zusammen, deren Abschätzung langwierig ist.

Für den Beweis von Satz 0.2 unterscheidet man, ob die Isometrien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ hyperbolisch oder elliptisch sind und wie sie sich gegenseitig verhalten. Im Beweis der entsprechenden Proposition 1.5 in [KKS] spielen die Achsen von hyperbolischen Isometrien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung eine wichtige Rolle. In einem Gromov-hyperbolischen Raum ist a priori nicht klar, ob Achsen oder achsenähnliche Objekte existieren. Ich werde zeigen, dass es in der Situation von Satz 0.2 Objekte gibt, welche sich bis auf eine Konstante wie Achsen in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung verhalten.

Satz 0.3. *Sei $\delta > 0$. Seien X ein eigentlicher, geodätischer, δ -hyperbolischer Raum und Γ eine Gruppe, welche frei, total diskontinuierlich, durch Isometrien und kokompakt auf X operiert. Sei $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung mit $\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \Omega(r)$ für alle $r \geq 0$ und $y, z \in X$. Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, γ^+, γ^- die eindeutigen Fixpunkte von γ auf dem Rand und $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von γ^- nach γ^+ . Sei $d_{\gamma^\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \min d_{\gamma^n}$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$:*

$$d(\gamma^z e(t), e(t + z \cdot d_{\gamma^\infty})) \leq \mathcal{B},$$

wobei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Der Beweis von Satz 0.3 erfordert etwas Aufwand. Wir werden zuerst eine andere Art von achsenähnlichen Objekten untersuchen, welche wir Quasi-Achsen nennen, und mit ihrer Hilfe die gesuchte Abschätzung zeigen.

Diese Arbeit ist folgendermassen strukturiert: Kapitel 1 enthält die benötigten Definitionen und Aussagen im Zusammenhang mit Gromov-hyperbolischen Räumen. Die meisten Ergebnisse sind bekannt und werden nur zitiert.

In Kapitel 2 untersuchen wir Achsen und Quasi-Achsen von hyperbolischen Isometrien und beweisen Satz 0.3. Die gefundenen Abschätzungen werden in den folgenden Kapiteln gebraucht, speziell im Beweis von Satz 0.2.

Weitere Vorbereitungen für den Beweis von Satz 0.2 finden sich in Kapitel 3. Wir betrachten in erster Linie Projektionen auf Mengen mit kleiner Verschiebung unter gegebenen Isometrien. Dies ermöglicht uns später, Satz 0.2 linear in $\max_{i=1,\dots,n} d(x, \gamma_i x) + \max_{i=1,\dots,n} d(y, \gamma_i y)$ zu erhalten. Kapitel 4 enthält den Beweis von Satz 0.2.

In Kapitel 5 wird schliesslich Satz 0.1 bewiesen. Anschliessend schätzen wir mit Hilfe von Satz 0.2 noch den „Abstand“ kürzester Repräsentanten von freien Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \rightarrow M$ ab.

Anhang A enthält zwei Kompaktheitsargumente für Mannigfaltigkeiten, welche in keinem Zusammenhang mit Gromov-Hyperbolizität stehen, aber für die Beweise von Kapitel 5 gebraucht werden: eine Aussage über endliche Geometrie (Satz A.3) und eine Beschränkung der Länge von kleineren Homotopien (Satz A.4).

Die vorliegende Arbeit gehört in den Kontext der metrischen und Riemannschen Geometrie. M. Bridson und J. Howie beweisen in [BHo] eine Aussage, die im Rahmen von hyperbolischen Gruppen äquivalent zu Satz 0.2 ist. Die beiden Arbeiten sind unabhängig voneinander entstanden.

Notationen und Konventionen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ und \mathbb{Z} bezeichnen die natürlichen und die ganzen Zahlen, $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. \mathbb{R} sei die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ die positive Halbachse. Für $t \in \mathbb{R}$ seien $\lfloor t \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq t\}$ und $\lceil t \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq t\}$.

$\dot{\cup}$ bezeichne die Vereinigung von disjunkten Mengen, $\#$ die Kardinalität einer Menge.

Ist Γ eine Gruppe und sind $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, so sei $Z(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ der Zentralisator von $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ in Γ .

Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so bezeichne $\overset{\circ}{Y}$ das Innere, \overline{Y} den Abschluss von Y in X . In einem metrischen Raum seien $B_r(x)$ bzw. $\overline{B}_r(x)$ der offene bzw. abgeschlossene Ball mit Radius r um x .

Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so bezeichnen wir mit $\text{diam}(M)$ ihren Durchmesser, mit $\text{inj}(M)$ ihren Injektivitätsradius und mit K_M ihre Schnittkrümmung. M_κ^2 sei die 2-dimensionale vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung κ . Ist nichts anderes angegeben, sind alle Mannigfaltigkeiten C^∞ -differenzierbar und ohne Rand.

Weiter seien d_L der Lipschitz-Abstand und d_H der Hausdorff-Abstand.

Für die Kapitel 2 bis 4 gelte immer folgende Generalvoraussetzung: Seien $D, \delta > 0$. Seien X ein eigentlicher, geodätischer, δ -hyperbolischer Raum und Γ eine Gruppe, welche frei, total diskontinuierlich, durch Isometrien und kompakt auf X operiert mit $\text{diam}(X/\Gamma) \leq D$. Sei $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung mit $\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \Omega(r)$ für alle $r \geq 0$ und $y, z \in X$.

In Kapitel 5 gelte immer folgende Generalvoraussetzung: Seien $N \in \mathbb{N}^*$, $D > 0$, $\varrho \in (0, D]$, $\kappa_1 \leq \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. M sei eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{diam}(M) \leq D$, $\text{inj}(M) \geq \varrho$ und $\kappa_1 \leq K_M \leq \kappa_2$. Seien $\pi : X \rightarrow M$ die universelle Überlagerung von M und Γ die Decktransformationsgruppe. X sei δ -hyperbolisch. (Die Voraussetzung $\delta > 0$ ist keine Einschränkung, da jeder 0-hyperbolische Raum δ -hyperbolisch ist für alle $\delta > 0$.)

Dank

Ich danke Professor V. Schroeder für die hervorragende Betreuung dieser Dissertation. Herr Schroeder nahm sich immer wieder Zeit, Ergebnisse und Schwierigkeiten meiner Arbeit zu diskutieren, seine Anregungen trugen wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit bei.

Professor J. Howie von der Heriot-Watt University Edinburgh danke ich für seine Bereitschaft, diese Dissertation zu begutachten, und seinen Hinweis, dass eine frühere Version von Lemma 1.46 verstärkt werden kann. Aussage und Beweis von Lemma 1.46 entsprechen nun seinem Vorschlag.

1 Gromov-hyperbolische Räume

Dieses Kapitel fasst die benötigten grundlegenden Definitionen und Ergebnisse im Zusammenhang mit Gromov-hyperbolischen Räumen zusammen. Die meisten Aussagen sind bekannt, man findet sie in [CDP], [GH] und zum Teil in [A], [BBI] und [BHa]. Eine Ausnahme bildet Abschnitt 1.7, dort formuliere ich einige später oft gebrauchte Abschätzungen über das Auseinanderlaufen von Geodäten in hyperbolischen Räumen.

1.1 δ -Hyperbolizität

Definition 1.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- Seien $x, y, z \in X$. $(x|y)_z := \frac{1}{2} \cdot [d(x, z) + d(y, z) - d(x, y)]$ heisst Gromov-Produkt von x, y mit Basispunkt z .
- Sei $\delta \geq 0$. X heisst δ -hyperbolisch, wenn $(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta$ gilt für alle $x, y, z, w \in X$.
- X heisst Gromov-hyperbolisch oder hyperbolisch, wenn X δ -hyperbolisch ist für ein $\delta \geq 0$.

Definition 1.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Kurve $g : I \rightarrow X$ heisst kürzeste Geodäte oder minimierend, wenn $d(g(t), g(s)) = L(g|_{[t,s]})$ ist für alle $t \leq s \in I$. (Die Bezeichnung Geodäte bleibt den Geodäten im Riemannschen Sinn vorbehalten, die global nicht notwendig minimierend sind.)
- Eine kürzeste Geodäte $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ heisst Strahl.
- X heisst geodätisch, wenn es für alle $x, y \in X$ eine kürzeste Geodäte von x nach y gibt.

Konvention. • Ist nichts anderes erwähnt, sind kürzeste Geodäten immer nach Bogenlänge oder, falls dies nicht möglich ist, proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

- Sind $x, y \in X$, so bezeichne $[x, y]$ eine kürzeste Geodäte bzw. das Bild einer kürzesten Geodäten von x nach y . Diese Bezeichnung wird auch verwendet, wenn es mehrere kürzeste Geodäten von x nach y geben kann. In diesem Fall ist entweder aus dem Zusammenhang klar, welche gemeint ist, oder es kann eine beliebige gewählt werden.
- Ist $g : [a, b] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte und sind $z = g(u)$, $w = g(v)$ mit $u \leq v \in [a, b]$, so ist mit $[z, w]$ jeweils $g|_{[u,v]}$ bzw. das Bild davon gemeint, ausser es sei etwas anderes angegeben.

Definition 1.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein (geodätisches) Dreieck in X besteht aus drei kürzesten Geodäten $g_i : [a_i, b_i] \rightarrow X$ mit $g_i(b_i) = g_{i+1}(a_{i+1})$ für $i = 1, 2, 3$ (Indizes mod 3) und wird mit $\triangle(g_1, g_2, g_3)$ bezeichnet.

Konvention. • Alle Dreiecke sind geodätisch, auch wenn dies nicht speziell erwähnt wird.

- Ein Dreieck kann auch durch drei Punkte $x, y, z \in X$ angegeben und mit $\triangle(x, y, z)$ bezeichnet werden. In diesem Fall ist entweder aus dem Zusammenhang klar, welche kürzesten Geodäten $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ gemeint sind, oder diese können beliebig gewählt werden (sind dann aber fest).

Definition 1.4. Seien $\delta \geq 0$, (X, d) ein geodätischer metrischer Raum, $x_1, x_2, x_3 \in X$ und $\triangle(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_1]$ ein geodätisches Dreieck. Das Dreieck $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ erfüllt die Bedingung von Rips mit δ , wenn $d(z, [x_{i+2}, x_i] \cup [x_{i+2}, x_{i+1}]) \leq \delta$ ist für alle $z \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$ (Indizes mod 3).

Definition 1.5. Ein metrischer Baum, bestehend aus drei Kanten, welche von einer gemeinsamen Ecke ausgehen, heisst Tripod. Ein Tripod ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt durch die Länge seiner Kanten. Degenerierte Fälle, bei denen eine oder mehrere Kanten Länge 0 haben, werden nicht ausgeschlossen.

Bemerkung 1.6. Seien (X, d) ein geodätischer metrischer Raum, $\triangle(x, y, z)$ ein Dreieck in X .

- Dann existieren bis auf Isometrie genau ein Tripod T_Δ und eine Abbildung $f_\Delta : \triangle(x, y, z) \rightarrow T_\Delta$, welche eingeschränkt auf jede der Seiten $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ isometrisch ist, so dass $f_\Delta(x)$, $f_\Delta(y)$, $f_\Delta(z)$ die Endpunkte von T_Δ sind. f_Δ heisst Tripod-Abbildung.
- Sei w das Zentrum des Tripods, $f_\Delta^{-1}(w) =: \{w_1, w_2, w_3\}$ (Abbildung 1). Die Punkte w_1, w_2, w_3 heissen die Tripel-Punkte von $\triangle(x, y, z)$. Es gilt $d(x, w_1) = d(x, w_2) = (y|z)_x = d_{T_\Delta}(f_\Delta(x), w)$.

Definition 1.7. Seien (X, d) ein geodätischer metrischer Raum und $\delta \geq 0$, $\triangle(x, y, z) = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ ein geodätisches Dreieck in X , T_Δ der zugehörige Tripod und $f_\Delta : \triangle(x, y, z) \rightarrow T_\Delta$ die Tripod-Abbildung. $\triangle(x, y, z)$ heisst δ -dünn, wenn $d(u, v) \leq \delta$ ist für alle $u, v \in \triangle(x, y, z)$ mit $f_\Delta(u) = f_\Delta(v)$.

Satz 1.8. Seien (X, d) ein geodätischer metrischer Raum, $\delta \geq 0$. Betrachte folgende Eigenschaften:

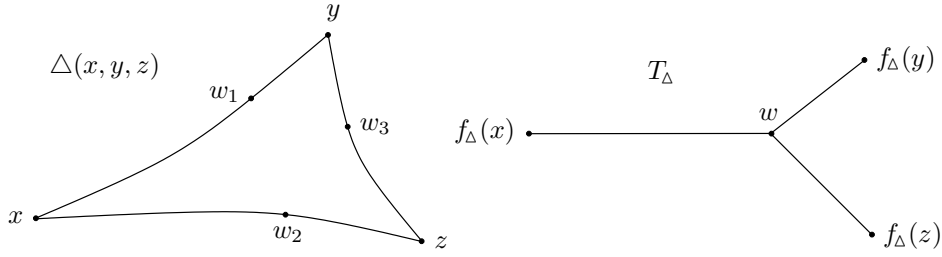


Abbildung 1: Dreieck, Tripel-Punkte und Tripod

- (a) X ist δ -hyperbolisch.
- (b) Alle geodätischen Dreiecke in X erfüllen die Bedingung von Rips mit δ .
- (c) Alle geodätischen Dreiecke in X sind δ -dünn.

Diese sind äquivalent bis auf Modifikation der Konstante. Genauer: Aus (a) mit δ folgen (b) und (c) mit 4δ . Aus (b) mit δ folgen (a) mit 3δ und (c) mit 4δ . Aus (c) mit δ folgen (a) und (b) mit δ .

Beweis. [CDP, Chap. 1, §3], [GH, Chap. 2, Prop. 21], [A, Prop. 2.1], [BBI, Chap. 8.4.1], [BH_a, Chap. III.H.1].

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir ohne Verweis auf obigen Satz oft verwenden, dass in einem geodätischen, δ -hyperbolischen Raum alle geodätischen Dreiecke 4δ -dünn und alle geodätischen Vierecke 8δ -dünn sind. Auch das folgende Lemma werden wir oft benützen, ohne darauf hinzuweisen.

Lemma 1.9. Seien $\delta \geq 0$ und X ein geodätischer, δ -hyperbolischer Raum. Seien $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei proportional zur Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodäten. Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$:

$$d(g_1(t), g_2(t)) \leq (1 - t) \cdot d(g_1(0), g_2(0)) + t \cdot d(g_1(1), g_2(1)) + 8\delta.$$

Beweis. [GH], Chap. 2, Prop. 25.

Definition 1.10. Ein metrischer Raum X heisst eigentlich, wenn alle abgeschlossenen Bälle in X kompakt sind. (Äquivalent dazu ist die Bedingung: Alle abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen von X sind kompakt.)

Bemerkung 1.11. Seien (X, d) ein eigentlicher, geodätischer metrischer Raum und $Y \subset X$ abgeschlossen. Dann existiert eine Projektion von X auf Y , i. e. eine Abbildung $P : X \rightarrow Y$ mit $d(x, P(x)) = d(x, Y)$ für alle $x \in X$.

Konvention. Für den Rest von Kapitel 1 seien $\delta \geq 0$ und (X, d) ein eigentlicher, geodätischer, δ -hyperbolischer Raum.

1.2 Quasi-Geodäten und Quasi-Isometrien

Definition 1.12. Sei I ein Intervall.

- Seien $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$. Eine stetige Abbildung $g : I \rightarrow X$ heisst (λ, μ) -Quasi-Geodäte, wenn $\frac{1}{\lambda} \cdot L(g|_{[s,t]}) - \mu \leq d(g(s), g(t))$ ist für alle $s \leq t \in I$.
- Eine (λ, μ) -Quasi-Geodäte $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ heisst (λ, μ) -Quasi-Strahl.
- Seien $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$, $H > 0$. Eine stetige Abbildung $g : I \rightarrow X$ heisst (λ, μ, H) -lokal-Quasi-Geodäte, wenn $\frac{1}{\lambda} \cdot L(g|_{[s,t]}) - \mu \leq d(g(s), g(t))$ ist für alle $s \leq t \in I$ mit $L(g|_{[s,t]}) \leq H$.
- $g : I \rightarrow X$ heisst Quasi-Geodäte bzw. Quasi-Strahl, wenn es $\lambda \geq 1$ und $\mu \geq 0$ gibt, so dass g eine (λ, μ) -Quasi-Geodäte bzw. ein (λ, μ) -Quasi-Strahl ist.
- $g : I \rightarrow X$ heisst lokal-Quasi-Geodäte, wenn es $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$ und $H > 0$ gibt, so dass g eine (λ, μ, H) -lokal-Quasi-Geodäte ist.

Konvention. Quasi-Geodäten, Quasi-Strahlen und lokal-Quasi-Geodäten sind immer nach Bogenlänge oder, falls dies nicht möglich ist, proportional zur Bogenlänge parametrisiert, wenn nichts anderes angegeben ist.

Satz 1.13. Für $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$ gibt es $H = H(\delta, \lambda, \mu) > 0$, $\lambda' = \lambda'(\delta, \lambda, \mu) \geq 1$, $\mu' = \mu'(\delta, \lambda, \mu) \geq 0$, so dass jede (λ, μ, H) -lokal-Quasi-Geodäte eine (globale) (λ', μ') -Quasi-Geodäte ist.

Beweis. [CDP], Chap. 3, Theorem 1.4.

Satz 1.14. Für $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$ gibt es $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \lambda, \mu) \geq 0$, so dass gilt: Seien $g : [a, b] \rightarrow X$ eine (λ, μ) -Quasi-Geodäte und $f : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $g(a)$ nach $g(b)$. Dann ist $d_H(\text{Im}(f), \text{Im}(g)) \leq \varepsilon$, wobei d_H den Hausdorff-Abstand bezeichne.

Beweis. [CDP], Chap. 3, Theorem 1.3 und Lemma 1.11 oder [GH], Chap. 5, Theorem 11.

Definition 1.15. Seien (X_1, d_1) , (X_2, d_2) metrische Räume, $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Abbildung.

- Seien $\lambda > 0$ und $\mu \geq 0$. f heisst (λ, μ) -quasi-isometrisch, wenn für alle $x, y \in X_1$ gilt:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot d_1(x, y) - \mu \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d_1(x, y) + \mu.$$

- f heisst quasi-isometrisch, wenn es $\lambda > 0$ und $\mu \geq 0$ gibt, so dass f (λ, μ) -quasi-isometrisch ist.
- Ist f quasi-isometrisch mit $\sup_{x \in X_2} d_2(x, \text{Im}(f)) < \infty$, so heisst f Quasi-Isometrie.

Satz 1.16. Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ geodätische metrische Räume.

- Sei $f : X_1 \longrightarrow X_2$ quasi-isometrisch. Ist X_2 hyperbolisch, so auch X_1 .
- Sei $f : X_1 \longrightarrow X_2$ eine Quasi-Isometrie. X_1 ist genau dann hyperbolisch, wenn X_2 hyperbolisch ist.

Beweis. [CDP], Chap. 3, Theorem 2.2 oder [GH], Chap. 1, Theorem 29 und Chap. 5, Remark 3(ii) sowie Theorem 12.

1.3 Rand eines hyperbolischen Raumes

Definition 1.17. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt.

- Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Folge in X . $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert im Unendlichen, wenn gilt $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (a_i | a_j)_{x_0} = \infty$.
- Seien $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen in X , die im Unendlichen konvergieren. $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (b_i)_{i \in \mathbb{N}} : \Longleftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} (a_i | b_i)_{x_0} = \infty$.

Bemerkung 1.18. • Diese Definition ist unabhängig vom Punkt $x_0 \in X$.

- Konvergiert $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ im Unendlichen, so gilt $d(a_i, x_0) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$.
- Konvergieren $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ im Unendlichen, so gilt $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ genau dann, wenn $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (a_i | b_j)_{x_0} = \infty$ ist.

Definition 1.19. • Bezeichne $S_\infty X$ die Menge aller Folgen in X , welche im Unendlichen konvergieren. \sim ist eine Äquivalenzrelation auf $S_\infty X$, und $\partial_\infty X := S_\infty X / \sim$ heisst der Rand von X .

- Ist $\xi \in \partial_\infty X$ die Äquivalenzklasse der Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S_\infty X$, so sagt man, a_i konvergiere gegen ξ , und schreibt $a_i \longrightarrow \xi$.

Lemma 1.20. Seien $C \geq 0$, $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S_\infty X$ und $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $d(a_i, b_i) \leq C$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S_\infty X$ mit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Beweis. [CDP], Chap. 2, Cor. 1.3.

Bemerkung 1.21. • Ein Strahl oder Quasi-Strahl $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ definiert einen eindeutigen Punkt $g(\infty) \in \partial_\infty X$, so dass $g(i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g(\infty)$. g heisst Strahl bzw. Quasi-Strahl von $g(0)$ nach $g(\infty)$.
 • Eine kürzeste Geodäte oder Quasi-Geodäte $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ definiert zwei eindeutige Punkte $g(\infty), g(-\infty) \in \partial_\infty X$, so dass $g(i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g(\infty)$ und $g(-i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g(-\infty)$. g heisst kürzeste Geodäte bzw. Quasi-Geodäte von $g(-\infty)$ nach $g(\infty)$.

Bemerkung 1.22. Seien $x \in X$ und $\xi_1 \neq \xi_2 \in \partial_\infty X$. Dann existieren ein Strahl von x nach ξ_2 und eine kürzeste Geodäte von ξ_1 nach ξ_2 . Diese sind nicht notwendigerweise eindeutig. (Wir werden sie trotzdem mit $[x, \xi_2]$ bzw. $[\xi_1, \xi_2]$ bezeichnen.)

Beweis. [CDP], Chap. 2, Prop. 2.1 oder [GH], Chap. 7, Prop. 4 und Prop. 6.

Satz 1.23. Seien $g, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ Strahlen. Dann sind äquivalent:

- (a) $g(\infty) = f(\infty)$
- (b) $d_H(\text{Im}(g), \text{Im}(f)) < \infty$
- (c) $\sup_{t \geq 0} d(g(t), f(t)) < \infty$

Beweis. [GH], Chap. 7, Prop. 2.

Satz 1.24. (a) Seien $g, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ zwei Strahlen mit $g(0) = f(0)$ und $g(\infty) = f(\infty)$. Dann ist $\sup_{t \geq 0} d(g(t), f(t)) \leq 8\delta$.
 (b) Seien $g, f : \mathbb{R} \rightarrow X$ zwei kürzeste Geodäten mit $g(-\infty) = f(-\infty)$ und $g(\infty) = f(\infty)$. Dann ist $d_H(\text{Im}(f), \text{Im}(g)) \leq 8\delta$, und es gibt $u \in \mathbb{R}$ mit $\sup_{t \in \mathbb{R}} d(g(t), f(t - u)) \leq 40\delta$.
 (c) Seien $x_1, x_2, x_3 \in X \cup \partial_\infty X$ und $[x_i, x_{i+1}]$ kürzeste Geodäten bzw. Strahlen für $i = 1, 2, 3$ (Indizes mod 3). Dann erfüllt das Dreieck $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ die Bedingung von Rips mit 24δ .

Beweis. [CDP], Chap. 2, Prop. 2.2 und [GH], Chap. 7, Cor. 3.

Satz 1.14 lässt sich für unendlich lange Quasi-Geodäten verallgemeinern:

Satz 1.25. Für $\lambda \geq 1, \mu \geq 0$ gibt es $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \lambda, \mu) \geq 0$, so dass gilt:

- (a) Sind $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ ein (λ, μ) -Quasi-Strahl und $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ ein Strahl mit $g(0) = f(0)$ und $g(\infty) = f(\infty)$, so gilt $d_H(\text{Im}(f), \text{Im}(g)) \leq \varepsilon$.

(b) Sind $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine (λ, μ) -Quasi-Geodäte und $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte mit $g(-\infty) = f(-\infty)$ und $g(\infty) = f(\infty)$, so gilt $d_H(\text{Im}(f), \text{Im}(g)) \leq \varepsilon$.

Beweis. [CDP], Chap. 3, Theorem 3.1 oder [GH], Chap. 5, Theorem 25.

Satz 1.26. Seien (X_1, d_1) , (X_2, d_2) eigentliche, geodätische, δ -hyperbolische Räume und $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Quasi-Isometrie. f induziert eine Bijektion $\partial_\infty X_1 \rightarrow \partial_\infty X_2$ (wieder f genannt), gegeben durch: Für $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S_\infty X_1$ sei $f([(a_i)_{i \in \mathbb{N}}]) := [(f(a_i))_{i \in \mathbb{N}}]$, wobei $[\cdot]$ Äquivalenzklassen bezeichne.

Beweis. [CDP], Chap. 3, Theorem 2.2 oder [GH], Chap. 7, Prop. 14 (für diese Arbeit ist es nicht nötig, $\partial_\infty X$ mit einer Topologie zu versehen).

1.4 Center

Der Begriff des Centers einer beschränkten Menge stammt von Brady [B], hier wird eine verallgemeinerte Definition verwendet.

Definition 1.27. Seien $S \subset X$ beschränkt und $a \geq 0$.

- $\text{rad}(S) := \inf\{0 < r < \infty \mid \exists x \in X \text{ mit } S \subset \overline{B}_r(x)\} \in \mathbb{R}_+$ ist der Radius von S .
- $\text{Cent}_a(S) := \{x \in X \mid S \subset \overline{B}_{\text{rad}(S)+a}(x)\}$ heisst a -Center von S .

Analog zu [B, Lemma 2.1] zeigt man:

Lemma 1.28. Seien $a \geq 0$ und $S \subset X$ beschränkt. Dann ist $\text{Cent}_a(S) \neq \emptyset$ und $\text{diam}(\text{Cent}_a(S)) \leq 8\delta + 2a$.

1.5 Hyperbolische Gruppen

Definition 1.29. Sei Γ eine endlich erzeugte Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem Σ und Einheitsselement e . Sei s ein Wort im Alphabet $\Sigma \cup \Sigma^{-1} \setminus \{e\}$, d. h. $s = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \Sigma \cup \Sigma^{-1} \setminus \{e\}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Setze $L_\Sigma(s) := n$. Für $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ sei $|\gamma|_\Sigma := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid s \text{ repräsentiert } \gamma \text{ und } L_\Sigma(s) = n\}$, sei ausserdem $|e|_\Sigma := 0$. Schliesslich definiert man $d_\Sigma(\gamma_1, \gamma_2) := |\gamma_2^{-1} \gamma_1|_\Sigma$ für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. d_Σ heisst Wortmetrik bezüglich Σ .

Bemerkung 1.30. d_Σ definiert in der Tat eine Metrik auf Γ , welche invariant ist unter der Operation von Γ auf sich selbst durch Linkstranslation.

Definition 1.31. Eine endlich erzeugte Gruppe Γ mit endlichem Erzeugendensystem Σ heisst δ -hyperbolisch bezüglich Σ , wenn Γ mit der Wortmetrik d_Σ δ -hyperbolisch ist.

Satz 1.32. Sei Γ eine endlich erzeugte Gruppe mit endlichen Erzeugendensystemen Σ_1, Σ_2 . Seien d_1, d_2 die Wortmetriken bezüglich Σ_1, Σ_2 .

- (a) Es gibt $C > 0$ mit $\frac{1}{C} \cdot d_2 \leq d_1 \leq C \cdot d_2$.
- (b) Γ ist hyperbolisch bezüglich $\Sigma_1 \iff \Gamma$ ist hyperbolisch bezüglich Σ_2 .

Beweis. [CDP], Chap. 4, Theorem 3.1 und Lemma 3.2 oder [GH], Chap. 1, §2 und Chap. 5, Cor. 14.

Definition 1.33. Sei Γ eine endlich erzeugte Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem Σ . Der Cayley-Graph $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ ist der eindimensionale simpliziale Komplex, dessen Ecken die Elemente von Γ sind und bei dem zwei Ecken γ_1, γ_2 durch eine Kante verbunden sind genau dann, wenn es $\sigma \in \Sigma \cup \Sigma^{-1} \setminus \{e\}$ gibt mit $\gamma_2 = \gamma_1 \sigma$. $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ wird mit folgender Metrik versehen: Jede Kante ist isometrisch zum Intervall $[0, 1]$, $d_{\mathfrak{G}}$ sei die dazugehörige Längenmetrik.

Bemerkung 1.34. • $(\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma), d_{\mathfrak{G}})$ ist ein eigentlicher, geodätischer, wegzusammenhängender metrischer Raum, so dass die natürliche Inklusion $(\Gamma, d_\Sigma) \longrightarrow (\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma), d_{\mathfrak{G}})$ isometrisch und eine Quasi-Isometrie ist.
• Γ ist hyperbolisch bezüglich $\Sigma \iff (\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma), d_{\mathfrak{G}})$ ist hyperbolisch.

Beweis. [CDP], Chap. 4, §2.

Definition 1.35. Seien Y ein topologischer Raum und Γ eine Gruppe, welche auf Y operiert.

- Γ operiert frei, wenn $\gamma y \neq y$ ist für alle $y \in Y$, $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$.
- Γ operiert kokompakt, wenn Y/Γ kompakt ist.
- Γ operiert total diskontinuierlich, wenn für jedes kompakte $K \subset Y$ die Menge $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Satz 1.36. Seien Y ein eigentlicher, geodätischer metrischer Raum und Γ eine Gruppe, welche total diskontinuierlich, kokompakt und durch Isometrien auf Y operiert.

(a) Γ ist endlich erzeugbar, und es gibt eine Quasi-Isometrie $\Gamma \longrightarrow Y$, wobei Γ mit einer beliebigen Wortmetrik versehen ist.

Genauer: Wähle $y \in Y$ fest, sei $\varphi : \Gamma \longrightarrow Y$, $\varphi(\gamma) := \gamma(y)$. Dann gibt es $C > 0$ und ein endliches Erzeugendensystem Σ von Γ mit

$$\frac{1}{C} \cdot d_{\Sigma}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d(\varphi(\gamma_1), \varphi(\gamma_2)) \leq C \cdot d_{\Sigma}(\gamma_1, \gamma_2)$$

für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und $d(z, \text{Im}(\varphi)) \leq C$ für alle $z \in Y$.

(b) Y ist hyperbolisch $\iff \Gamma$ ist hyperbolisch.

Beweis. [CDP], Chap. 4, Theorem 4.1, Lemma 4.2 und Prop. 4.4 oder [GH], Chap. 3, Prop. 19.

1.6 Isometrien

Definition 1.37. Mit $\text{Iso}(X)$ bezeichnen wir die Isometriegruppe von X . Sei $\gamma \in \text{Iso}(X)$.

- γ heisst elliptisch $\iff \exists x \in X$, so dass $\{\gamma^z x \mid z \in \mathbb{Z}\}$ beschränkt ist.
- γ heisst hyperbolisch $\iff \exists x \in X$, so dass die Abbildung $g : \mathbb{Z} \longrightarrow X$, $g(z) := \gamma^z x$ quasi-isometrisch ist.
- γ heisst parabolisch $\iff \gamma$ ist weder elliptisch noch hyperbolisch.

Bemerkung 1.38. • γ ist elliptisch $\iff \forall x \in X$ ist $\{\gamma^z x \mid z \in \mathbb{Z}\}$ beschränkt.

- γ ist hyperbolisch $\iff \forall x \in X$ ist die Abbildung $g : \mathbb{Z} \longrightarrow X$, $g(z) := \gamma^z x$ quasi-isometrisch.
- Sei $z \in \mathbb{Z}^*$. Dann sind γ und γ^z vom selben Typ.
- In der später untersuchten Situation wird es keine parabolischen Isometrien geben (Korollar 1.50), deshalb werden diese hier nicht weiter betrachtet.

Definition 1.39. Sei $\gamma \in \text{Iso}(X)$.

- Die Abbildung $d_{\gamma} : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $d_{\gamma}(x) := d(x, \gamma x)$ heisst Verschiebungsfunktion von γ .
- $\min d_{\gamma} := \inf\{d_{\gamma}(x) \mid x \in X\}$ heisst minimale Verschiebung von γ . Die Bezeichnung $\min d_{\gamma}$ anstelle von $\inf d_{\gamma}$ in dieser Arbeit wird in Satz 1.51 gerechtfertigt.
- Sei $x \in X$ beliebig. $d_{\gamma^{\infty}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot d(x, \gamma^n x)$.

Bemerkung 1.40. $d_{\gamma^{\infty}}$ ist wohldefiniert und unabhängig von $x \in X$.

Lemma 1.41. *Sei $\gamma \in \text{Iso}(X)$. Es gelten:*

- (a) $d_{\gamma^\infty} \leq \min d_\gamma \leq d_{\gamma^\infty} + 16\delta$.
- (b) $d_{\gamma^\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \min d_{\gamma^n}$.
- (c) γ ist hyperbolisch $\iff d_{\gamma^\infty} > 0$.

Beweis. Beweise für (a) und (c) finden sich bei [CDP], Chap. 10, Prop. 6.3 und Prop. 6.4. Offensichtlich ist $d_{(\gamma^n)^\infty} = n \cdot d_{\gamma^\infty}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Damit folgt (b) aus (a), angewendet auf γ^n . \square

Lemma 1.42. *Seien $\gamma \in \text{Iso}(X)$ elliptisch, $x \in X$, $[x, \gamma x]$ eine kürzeste Geodäte und m der Mittelpunkt von $[x, \gamma x]$. Dann ist $d(m, \gamma m) \leq 6\delta$.*

Beweis. [CDP], Chap. 9, Lemma 3.1.

Bemerkung 1.43. Die Operation von $\text{Iso}(X)$ auf X lässt sich kanonisch auf $\partial_\infty X$ ausdehnen: Seien $\gamma \in \text{Iso}(X)$, $\xi \in \partial_\infty X$ und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S_\infty X$ mit $a_i \rightarrow \xi$. Sei $\eta \in \partial_\infty X$ mit $(\gamma(a_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \eta$, setze $\gamma(\xi) := \eta$. Dann ist $\gamma|_{\partial_\infty X}$ eine Bijektion von $\partial_\infty X$.

Lemma 1.44. *Sei $\gamma \in \text{Iso}(X)$ hyperbolisch.*

- (a) γ hat auf $\partial_\infty X$ genau zwei Fixpunkte. Seien diese ξ_1, ξ_2 .
- (b) $(\gamma^i(x))_{i \in \mathbb{N}}, (\gamma^{-i}(x))_{i \in \mathbb{N}} \in S_\infty X$ für alle $x \in X$, und es gilt entweder $\gamma^i(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi_1, \gamma^{-i}(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi_2$ für alle $x \in X$ oder $\gamma^i(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi_2, \gamma^{-i}(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi_1$ für alle $x \in X$.

Beweis. [GH], Chap. 8, Theorem 16.

Konvention. Wähle $\gamma^+, \gamma^- \in \{\xi_1, \xi_2\}$ so, dass $\gamma^i(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \gamma^+, \gamma^{-i}(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \gamma^-$ für alle $x \in X$. γ^+, γ^- sind also die eindeutigen Fixpunkte von γ auf $\partial_\infty X$.

Bemerkung 1.45. Sind $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $z \in \mathbb{Z}^*$, so haben γ und γ^z (mengenmässig) dieselben Fixpunkte auf $\partial_\infty X$.

Lemma 1.46. *Seien $\gamma \in \text{Iso}(X)$ hyperbolisch und $\sigma \in \text{Iso}(X)$ mit $\gamma\sigma = \sigma\gamma$. Dann gelten $\sigma(\gamma^+) = \gamma^+, \sigma(\gamma^-) = \gamma^-$.*

Beweis. Sei $x \in X$. Nach Lemma 1.44 sind $(\gamma^i(x))_{i \in \mathbb{N}}, (\gamma^i(\sigma x))_{i \in \mathbb{N}} \in S_\infty X$ mit $\gamma^i(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \gamma^+, \gamma^i(\sigma x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \gamma^+$. Wegen $\gamma^i(\sigma x) = \sigma(\gamma^i x)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt aus der Definition von $\sigma|_{\partial_\infty X}$ (Bemerkung 1.43): $\sigma(\gamma^+) = \gamma^+$. Analog zeigt man $\sigma(\gamma^-) = \gamma^-$. \square

Für zwei hyperbolische Isometrien folgt aus Lemma 1.46 insbesondere:

Lemma 1.47. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Iso}(X)$ hyperbolisch mit $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$. Dann gilt $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} = \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}$.*

Bemerkung 1.48. Seien Γ eine hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem Σ und $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ der dazugehörige Cayley-Graph. Sei $\delta \geq 0$ die Hyperbolizitätskonstante von $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$. Die Operation von Γ auf sich selbst durch Linkstranslation kann kanonisch auf $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ ausgedehnt werden, so dass $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma))$. Somit kann jedes $\gamma \in \Gamma$ als Isometrie von $(\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma))$ als elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch klassifiziert werden. Diese Klassifikation hängt nicht vom Erzeugendensystem Σ ab.

Satz 1.49. *Sei Γ eine hyperbolische Gruppe.*

- (a) Γ enthält keine parabolischen Elemente.
- (b) $\gamma \in \Gamma$ ist elliptisch $\iff \gamma$ hat endliche Ordnung.
- $\gamma \in \Gamma$ ist hyperbolisch $\iff \gamma$ hat unendliche Ordnung.

Beweis. [CDP], Chap. 9, Theorem 3.3 und Theorem 3.4 oder [GH], Chap. 8, Prop. 28 und Theorem 29.

Sei nun $\Gamma \subset \text{Iso}(X)$ eine Gruppe, welche total diskontinuierlich, durch Isometrien und kokompakt auf X operiert. Nach Satz 1.36 ist Γ endlich erzeugbar und hyperbolisch. Sei Σ ein endliches Erzeugendensystem von Γ . Dann kann jedes $\gamma \in \Gamma$ als Isometrie von $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ klassifiziert werden, wie oben beschrieben. Gleichzeitig kann γ auch als Isometrie von X klassifiziert werden. Mit Satz 1.36 zeigt man, dass diese beiden Klassifikationen übereinstimmen. Aus Satz 1.49 folgt somit:

Korollar 1.50. *Sei $\Gamma \subset \text{Iso}(X)$ eine Gruppe, die total diskontinuierlich, durch Isometrien und kokompakt auf X operiert. Dann gilt:*

- (a) $\gamma \in \Gamma$ als Isometrie von X kann nur elliptisch oder hyperbolisch sein.
- (b) γ ist elliptisch $\iff \gamma$ hat endliche Ordnung.
- γ ist hyperbolisch $\iff \gamma$ hat unendliche Ordnung.

Schliesslich wollen wir noch die Bezeichnung $\min d_\gamma$ anstelle von $\inf d_\gamma$ rechtfertigen. Mit Hilfe der Kompaktheit von X/Γ zeigt man:

Satz 1.51. *Sei $\Gamma \subset \text{Iso}(X)$ eine Gruppe, welche total diskontinuierlich, durch Isometrien und kokompakt auf X operiert. Sei $\gamma \in \Gamma$. Dann gibt es $x \in X$ mit $d_\gamma(x) = \min d_\gamma = \inf\{d(y, \gamma y) \mid y \in X\}$.*

1.7 Auseinanderlaufen von Geodäten

In einer Mannigfaltigkeit negativer Krümmung laufen Geodäten mit verschiedenen Endpunkten auf dem Rand linear auseinander. Die folgenden Lemmata zeigen ein ähnliches Verhalten in hyperbolischen Räumen.

In Abschnitt 1.7 seien wie bisher $\delta \geq 0$ und X ein eigentlicher, geodätischer, δ -hyperbolischer Raum. Weiter seien $e_1, e_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$ nach Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodäten mit $\{e_1(\infty), e_1(-\infty)\} \cap \{e_2(\infty), e_2(-\infty)\} = \emptyset$ und $k > 8$. Man sieht leicht:

Lemma 1.52. *Gelte $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) \leq k\delta$. Dann existieren*

$$\begin{aligned} a_1 &:= \min\{r \in \mathbb{R} \mid d(e_1(r), \text{Im}(e_2)) \leq k\delta\}, \\ b_1 &:= \max\{r \in \mathbb{R} \mid d(e_1(r), \text{Im}(e_2)) \leq k\delta\}, \\ a_2 &:= \min\{r \in \mathbb{R} \mid d(e_2(r), \text{Im}(e_1)) \leq k\delta\}, \\ b_2 &:= \max\{r \in \mathbb{R} \mid d(e_2(r), \text{Im}(e_1)) \leq k\delta\} \end{aligned}$$

in \mathbb{R} , und es gelten:

$$\begin{aligned} d(e_1(a_1), \text{Im}(e_2)) &= d(e_1(b_1), \text{Im}(e_2)) = k\delta, \\ d(e_2(a_2), \text{Im}(e_1)) &= d(e_2(b_2), \text{Im}(e_1)) = k\delta. \end{aligned}$$

Mit einer Fallunterscheidung zeigt man:

Lemma 1.53. *Gelte $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) \leq k\delta$. Seien a_1, b_1, a_2, b_2 die Zahlen aus Lemma 1.52. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (a) $b_1 - a_1 = d(e_1(b_1), e_1(a_1)) \leq 10k\delta$ und $b_2 - a_2 = d(e_2(b_2), e_2(a_2)) \leq 10k\delta$.
- (b) $d(e_1(a_1), e_2(a_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e_1(b_1), e_2(b_2)) \leq 5k\delta$.
- (c) $d(e_1(a_1), e_2(b_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e_1(b_1), e_2(a_2)) \leq 5k\delta$.

Lemma 1.54. *Gelte $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) \leq k\delta$. Seien a_1, b_1 die Zahlen aus Lemma 1.52. Seien $l \geq k$ und $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ so, dass $d(e_1(a_1), e_2(\tilde{a})) \leq l\delta$, $d(e_1(b_1), e_2(\tilde{b})) \leq l\delta$. Dann gelten:*

$$\begin{aligned} d(e_1(r), e_2(q)) &\geq |r - b_1| + |\tilde{b} - q| - l\delta & \forall r \geq b_1, q \in \mathbb{R}, \\ d(e_1(r), e_2(q)) &\geq |r - a_1| + |\tilde{a} - q| - l\delta & \forall r \leq a_1, q \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweis. Seien $r \geq b_1$, $q \in \mathbb{R}$. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Tripel-Punkte des Dreiecks $\triangle(e_1(b_1), e_1(r), e_2(\tilde{b}))$ und ψ_1, ψ_2, ψ_3 diejenigen des Dreiecks $\triangle(e_1(r), e_2(\tilde{b}), e_2(q))$ (siehe Abbildung rechts).

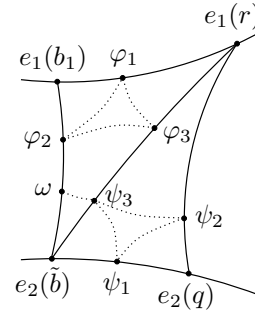
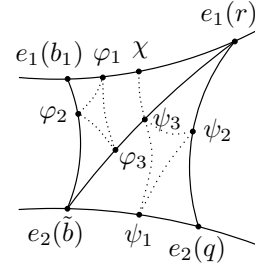
Nehmen wir an, es gelte $d(e_2(\tilde{b}), \varphi_3) < d(e_2(\tilde{b}), \psi_3)$. Sei $\chi \in [\varphi_1, e_1(r)]$ mit $d(e_1(r), \chi) = d(e_1(r), \psi_3)$. Dann folgt:

$$d(\chi, \text{Im}(e_2)) \leq d(\chi, \psi_1) \leq d(\chi, \psi_3) + d(\psi_3, \psi_1) \leq 8\delta < k\delta$$

und $\chi \in [e_1(b_1), e_1(r)]$ mit $r \geq b_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von b_1 .

Somit ist $d(e_2(\tilde{b}), \varphi_3) \geq d(e_2(\tilde{b}), \psi_3)$. Sei $\omega \in [e_2(\tilde{b}), \varphi_2]$ der Punkt mit $d(e_2(\tilde{b}), \omega) = d(e_2(\tilde{b}), \psi_3)$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(e_1(r), e_2(q)) &= d(e_1(r), \psi_2) + d(\psi_2, e_2(q)) \\ &= d(e_1(r), \varphi_1) + d(\varphi_2, \omega) + d(\psi_1, e_2(q)) \\ &\geq d(e_1(r), e_1(b_1)) - d(e_1(b_1), \varphi_2) \\ &\quad + d(e_2(\tilde{b}), e_2(q)) - d(e_2(\tilde{b}), \omega) \\ &\geq |r - b_1| + |\tilde{b} - q| - d(e_1(b_1), e_2(\tilde{b})) \\ &\geq |r - b_1| + |\tilde{b} - q| - l\delta. \end{aligned}$$



Die zweite Ungleichung zeigt man analog. □

Oft genügt eine einfachere Version dieses Lemmas.

Lemma 1.55. Gelte $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) \leq k\delta$. Seien a_1, b_1, a_2, b_2 die Zahlen aus Lemma 1.52. Dann gilt für alle $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} d(e_1(b_1 + u), \text{Im}(e_2)) &\geq u - k\delta, & d(e_1(a_1 - u), \text{Im}(e_2)) &\geq u - k\delta, \\ d(e_2(b_2 + u), \text{Im}(e_1)) &\geq u - k\delta, & d(e_2(a_2 - u), \text{Im}(e_1)) &\geq u - k\delta. \end{aligned}$$

Beweis. Seien $u \geq 0$ und $\tilde{b}, q \in \mathbb{R}$ so, dass $e_2(\tilde{b})$ bzw. $e_2(q)$ Projektionen von $e_1(b_1)$ bzw. $e_1(b_1 + u)$ auf $\text{Im}(e_2)$ sind. Aus Lemma 1.54 mit $l := k$ folgt:

$$d(e_1(b_1 + u), \text{Im}(e_2)) \geq u + |\tilde{b} - q| - k\delta \geq u - k\delta.$$

Die zweite Aussage folgt analog, die anderen durch Symmetrie. □

Lemma 1.56. *Gelte $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) \leq k\delta$. Seien a_1, b_1, a_2, b_2 die Zahlen aus Lemma 1.52. Dann gilt für alle $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} |v_1 - w_1| &= d(e_1(v_1), e_1(w_1)) \\ &\leq (b_1 - a_1) + d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + d(e_1(w_1), e_2(w_2)) + 2k\delta, \\ |v_2 - w_2| &= d(e_2(v_2), e_2(w_2)) \\ &\leq (b_2 - a_2) + d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + d(e_1(w_1), e_2(w_2)) + 2k\delta. \end{aligned}$$

Beweis. Man unterscheidet die Fälle $v_1 > b_1$, $v_1 \in [a_1, b_1]$, $v_1 < a_1$ sowie $w_1 > b_1$, $w_1 \in [a_1, b_1]$, $w_1 < a_1$ und benutzt Lemma 1.55, um die erste Ungleichung zu erhalten, die zweite zeigt man analog. \square

Dies ist die gewünschte Abschätzung für das Auseinanderlaufen von Geodäten im Fall $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) \leq k\delta$. Der Fall $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) > k\delta$ wird im folgenden Lemma behandelt.

Lemma 1.57. *Gelte $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) > k\delta$. Dann folgt für alle $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} d(e_1(v_1), e_1(w_1)) &\leq 2 \cdot d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + 2 \cdot d(e_1(w_1), e_2(w_2)), \\ d(e_2(v_2), e_2(w_2)) &\leq 2 \cdot d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + 2 \cdot d(e_1(w_1), e_2(w_2)). \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen die erste Ungleichung, die zweite folgt analog. Seien dazu $s, t \in \mathbb{R}$ so, dass $d(e_1(s), e_2(t)) = \min_{\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathbb{R}} d(e_1(\tilde{s}), e_2(\tilde{t})) =: L$.

Sei $r \geq s$. Wie bei Lemma 1.54 folgt: $d(e_1(r), \text{Im}(e_2)) \geq |r - s| - L$. Somit ist $|r - s| \leq d(e_1(r), \text{Im}(e_2)) + L$ für alle $r \geq s$, für $r < s$ zeigt man dies analog. Es folgt:

$$\begin{aligned} d(e_1(v_1), e_1(w_1)) &= |v_1 - w_1| \leq |v_1 - s| + |w_1 - s| \\ &\leq d(e_1(v_1), \text{Im}(e_2)) + d(e_1(w_1), \text{Im}(e_2)) + 2L \\ &\leq 2 \cdot d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + 2 \cdot d(e_1(w_1), e_2(w_2)). \end{aligned} \quad \square$$

2 Achsen von hyperbolischen Isometrien

Eine hyperbolische Isometrie einer Mannigfaltigkeit negativer Krümmung hat eine (bis auf Parametrisierung) eindeutige Achse, i. e. eine kürzeste Geodäte, die durch die gegebene Isometrie translatiert wird. Das Verhalten von zwei hyperbolischen Isometrien relativ zueinander (z. B. ob sie kommutieren) kann man erkennen, indem man ihre Achsen oder ihre Fixpunkte auf dem Rand untersucht.

Hyperbolische Isometrien von Gromov-hyperbolischen Räumen haben ähnliche Eigenschaften, allerdings in einer „quasifizierten“ Form. Eine (noch zu definierende) Achse wird durch die entsprechende Isometrie nur bis auf eine Konstante translatiert. Achsen müssen ausserdem nicht eindeutig sein, zwei verschiedene Achsen derselben Isometrie können aber nicht beliebig weit voneinander entfernt sein.

In diesem Kapitel definieren wir zwei Arten von achsenähnlichen Objekten, welche wir Achsen und Quasi-Achsen nennen, geben einige später benötigte Eigenschaften an und beweisen Satz 0.3. Zuerst zeigen wir ein einfaches Lemma über endliche Geometrie in der betrachteten Klasse von Räumen.

Lemma 2.1. *Seien $D > 0$, X ein eigentlicher, geodätischer metrischer Raum und Γ eine Gruppe, die frei, total diskontinuierlich, durch Isometrien und kokompakt auf X operiert mit $\text{diam}(X/\Gamma) \leq D$. Dann gibt es eine Abbildung $\Omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}^*$ mit $\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \Omega(r)$ für alle $r \geq 0$ und $y, z \in X$, wobei $\Gamma y := \{\gamma y \mid \gamma \in \Gamma\}$ den Orbit von y bezeichne.*

Beweis. Sei $x \in X$ fest. Sei $r \geq 0$. Setze

$$\Phi_r := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{B}_{r+3D}(x)) \cap \overline{B}_{r+3D}(x) \neq \emptyset\}.$$

Da X eigentlich ist und Γ total diskontinuierlich auf X operiert, ist $\#\Phi_r < \infty$. Setze $\Omega(r) := \#\Phi_r$.

Seien nun $y \in \overline{B}_D(x)$, $z \in \overline{B}_D(y)$. Für jedes $u \in (\Gamma y \cap \overline{B}_r(z))$ gibt es genau ein $\gamma_u \in \Gamma$ mit $u = \gamma_u y$.

$$d(x, \gamma_u x) \leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, u) + d(\gamma_u y, \gamma_u x) \leq r + 3D,$$

also ist $x \in \gamma_u(\overline{B}_{r+3D}(x)) \cap \overline{B}_{r+3D}(x)$, d. h. $\gamma_u \in \Phi_r$. Somit ist die Abbildung $h : \Gamma y \cap \overline{B}_r(z) \longrightarrow \Gamma$, $u \longmapsto \gamma_u$ injektiv mit $\text{Im}(h) \subset \Phi_r$. Es folgt:

$$\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \#\Phi_r = \Omega(r).$$

Dies gilt für alle $y \in \overline{B}_D(x)$, $z \in \overline{B}_D(y)$. Wegen $\text{diam}(X/\Gamma) \leq D$ folgt die Aussage für alle $y, z \in X$. \square

In den Kapiteln 2 bis 4 seien nun immer $D, \delta > 0$, X ein eigentlicher, geodätischer, δ -hyperbolischer Raum und Γ eine Gruppe, die frei, total diskontinuierlich, durch Isometrien und kokompakt auf X operiert mit $\text{diam}(X/\Gamma) \leq D$. Weiter sei $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung mit $\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \Omega(r)$ für alle $r \geq 0$ und $y, z \in X$.

Mit den kalligraphischen Buchstaben $\mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}$ bezeichnen wir Konstanten, die nur von Ω, D, δ abhängen. (Der Parameter D wird erst in die Abschätzungen des nächsten Kapitels eingehen. Der Einfachheit halber ist er hier schon erwähnt.)

2.1 Quasi-Achsen

In Satz 1.51 haben wir bereits gesehen, dass es für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein $x \in X$ gibt mit $d_\gamma(x) = \min d_\gamma$.

Lemma 2.2. *Seien $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$ mit $d_\gamma(x) = \min d_\gamma$ und $c : [0, d_\gamma(x)] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von x nach γx . Wir setzen c folgendermassen zu einer stetigen, nach Bogenlänge parametrisierten Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow X$ fort: Für $t \in \mathbb{R}$ gibt es eindeutige $z \in \mathbb{Z}$ und $s \in [0, d(x, \gamma x))$ mit $t = z \cdot d(x, \gamma x) + s$, setze $c(t) := \gamma^z c(s)$. Dann gelten:*

- $c(z \cdot d(x, \gamma x) + t) = \gamma^z c(t)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$.
- $d_\gamma(c(t)) = \min d_\gamma$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- *Eingeschränkt auf jedes Intervall der Länge $\min d_\gamma$ ist c minimierend.*
- *Ist γ hyperbolisch, so ist c eine Quasi-Geodäte von γ^- nach γ^+ , wobei γ^+, γ^- die eindeutigen Fixpunkte von γ in $\partial_\infty X$ gemäss Lemma 1.44 sind.*
- *Ist γ elliptisch, so ist c periodisch mit $c(t + \text{ord}(\gamma) \cdot d(x, \gamma x)) = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Die erste Eigenschaft gilt nach Definition von c . Seien nun $t \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$, $s \in [0, d(x, \gamma x))$ mit $t = z \cdot \min d_\gamma + s$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(c(t), \gamma c(t)) &= d(c(t), c(t + \min d_\gamma)) = d(\gamma^z c(s), \gamma^{z+1} c(s)) \\ &= d(c(s), \gamma c(s)) \leq d(c(s), \gamma x) + d(\gamma x, \gamma c(s)) \\ &= d(c(s), \gamma x) + d(x, c(s)) = d(x, \gamma x) = \min d_\gamma. \end{aligned}$$

Mit der Definition von $\min d_\gamma$ folgt: $d(c(t), \gamma c(t)) = d(c(t), c(t + \min d_\gamma)) = \min d_\gamma$. Also ist $d_\gamma(c(t)) = \min d_\gamma$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und eingeschränkt auf jedes Intervall der Länge $\min d_\gamma$ ist c minimierend. Den Rest der Aussage zeigt man mit der Definition einer hyperbolischen Isometrie, mit Lemma 1.44 und Korollar 1.50. \square

Definition 2.3. Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $x \in X$ mit $d_\gamma(x) = \min d_\gamma$, $c : [0, d_\gamma(x)] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von x nach γx und $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ die in obigem Lemma beschriebene Fortsetzung. Dann heisst c eine Quasi-Achse von γ .

Bemerkung 2.4. • Für jede hyperbolische Isometrie existiert mindestens eine Quasi-Achse, und jede Quasi-Achse ist eine stetige, nach Bogenlänge parametrisierte Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow X$ mit den in obigem Lemma beschriebenen Eigenschaften.

- Ist X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist jede Quasi-Achse eine Geodäte im Riemannschen Sinn.

Definition 2.5. Sei $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch. Eine nach Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodäte $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ von γ^- nach γ^+ heisst Achse von γ .

Bemerkung 2.6. Für jedes hyperbolische $\gamma \in \Gamma$ existiert mindestens eine Achse. Sind e_1, e_2 zwei Achsen von γ , so gilt $d_H(\text{Im}(e_1), \text{Im}(e_2)) \leq 8\delta$ nach Satz 1.24.

Somit haben wir zwei Arten von achsenähnlichen Objekten, so genannte Achsen und Quasi-Achsen. Quasi-Achsen werden translatiert durch die entsprechende Isometrie, müssen global aber nicht minimierend sein. Achsen sind global minimierend, müssen aber durch die entsprechende Isometrie nicht translatiert werden. Unser nächstes Ziel ist, den Abstand zwischen Achsen und Quasi-Achsen einer Isometrie abzuschätzen.

Satz 2.7. Für alle $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$ ist $d(x, \gamma^n x) \geq \mathcal{E}n$, wobei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \delta) > 0$.

Beweis. Setze $r := 12\delta$ und $\mathcal{E} := \frac{\delta}{2 \cdot \Omega(r)}$. Dann ist $\mathcal{E} > 0$ (wir haben $\delta > 0$ und $\text{Im}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ vorausgesetzt) und $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \delta)$.

Nehmen wir an, es gebe $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$ mit $d(x, \gamma^n x) < \mathcal{E}n$. Gemäss Bemerkung 1.40 existiert $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \cdot d(x, \gamma^p x)$. Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$d(x, \gamma^{kn}x) \leq \sum_{i=1}^k d(\gamma^{(i-1)n}x, \gamma^{in}x) = k \cdot d(x, \gamma^n x) < kn\mathcal{E}$ nach Annahme. Somit ist $\frac{d(x, \gamma^{kn}x)}{kn} < \mathcal{E}$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$, also $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \cdot d(x, \gamma^p x) \leq \mathcal{E}$. Es gibt $P_1 \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{p} \cdot d(x, \gamma^p x) \leq 2\mathcal{E}$ für alle $p \geq P_1$. (1)

Für alle $p \in \mathbb{N}$ seien $S_p := \{x, \gamma x, \gamma^2 x, \dots, \gamma^p x\}$ und $r_p := \text{rad}(S_p)$. Setze $b := d(x, \gamma x) > 0$, $P_2 := \lceil \frac{P_1 \cdot b}{\mathcal{E}} \rceil$ und $P := \max\{P_1, P_2\} \in \mathbb{N}^*$. Seien $p \geq P$ und $q \neq m \in \{0, 1, \dots, p\}$ beliebig. Ist $|q - m| \leq P_1$, folgt aus

$$d(x, \gamma^{|q-m|}x) \leq \sum_{i=1}^{|q-m|} d(\gamma^{i-1}x, \gamma^i x) = |q - m| \cdot b \leq P_1 \cdot b$$

und der Definition von P_2 :

$$\frac{d(\gamma^q x, \gamma^m x)}{p} = \frac{d(\gamma^{|q-m|}x, x)}{p} \leq \frac{P_1 \cdot b}{p} \leq \frac{P_1 \cdot b}{P_2} \leq \mathcal{E}.$$

Ist $|q - m| > P_1$, folgt mit (1):

$$\frac{d(\gamma^q x, \gamma^m x)}{p} = \frac{d(\gamma^{|q-m|}x, x)}{p} \leq \frac{d(\gamma^{|q-m|}x, x)}{|q - m|} \leq 2\mathcal{E}.$$

In jedem Fall ist $\frac{d(\gamma^q x, \gamma^m x)}{p} \leq 2\mathcal{E}$ für alle $q \neq m \in \{0, 1, \dots, p\}$. Also ist $\frac{\text{diam}(S_p)}{p} \leq 2\mathcal{E}$ und somit auch $\frac{r_p}{p} \leq 2\mathcal{E}$ für alle $p \geq P \in \mathbb{N}^*$. (2)

Als nächstes wollen wir zeigen: Es gibt $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p - q \geq \Omega(r)$ und $0 \leq r_p - r_q \leq \delta$. Nehmen wir an, dies gelte nicht. Für alle $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p - q \geq \Omega(r) > 0$ ist offensichtlich $r_p \geq r_q$. Somit muss $r_p - r_q > \delta$ sein für alle $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p - q \geq \Omega(r)$. Wegen $r_0 = 0$ folgt für alle $k \in \mathbb{N}^*$:

$$r_{k \cdot \Omega(r)} = \sum_{i=1}^k (r_{i \cdot \Omega(r)} - r_{(i-1) \cdot \Omega(r)}) > k \cdot \delta,$$

also

$$\frac{r_{k \cdot \Omega(r)}}{k \cdot \Omega(r)} > \frac{\delta}{\Omega(r)}.$$

Setze $L := \lceil \frac{P}{\Omega(r)} \rceil \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $L \cdot \Omega(r) \geq P$, also $\frac{r_{L \cdot \Omega(r)}}{L \cdot \Omega(r)} \leq 2\mathcal{E}$ nach (2). Zusammen folgt:

$$2\mathcal{E} = \frac{\delta}{\Omega(r)} < \frac{r_{L \cdot \Omega(r)}}{L \cdot \Omega(r)} \leq 2\mathcal{E}.$$

Dies ist ein Widerspruch, somit gibt es $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p - q \geq \Omega(r)$ und $0 \leq r_p - r_q \leq \delta$.

Es war $S_p = \{x, \gamma x, \dots, \gamma^p x\}$. Gemäss Lemma 1.28 gelten $\text{Cent}_0(S_p) \neq \emptyset$, $\text{Cent}_\delta(S_p) \neq \emptyset$. Seien $g \in \text{Cent}_0(S_p)$, $f \in \text{Cent}_\delta(S_p)$ und $l \in \{0, 1, \dots, \Omega(r)\}$. Wegen $g \in \text{Cent}_0(S_p)$ ist $S_q \subset S_p \subset \overline{B}_{r_p}(g) = \overline{B}_{r_p - r_q + r_q}(g) \subset \overline{B}_{\delta + r_q}(g)$, also $g \in \text{Cent}_\delta(S_q)$. Somit ist $\gamma^l g \in \text{Cent}_\delta(\gamma^l(S_q)) \subset \text{Cent}_{2\delta}(\gamma^l(S_q))$. (3)

Sei $v \in \{0, 1, \dots, q\}$. Dann ist $l + v \leq \Omega(r) + q \leq p$, also $\gamma^{l+v}x \in S_p$. Wegen $f \in \text{Cent}_\delta(S_p)$ folgt: $\gamma^{l+v}x \in \overline{B}_{r_p+\delta}(f) = \overline{B}_{r_p - r_q + r_q + \delta}(f) \subset \overline{B}_{2\delta + r_q}(f)$ für alle $v \in \{0, 1, \dots, q\}$, also $\gamma^l(S_q) \subset \overline{B}_{2\delta + r_q}(f)$. Ausserdem ist $\text{rad}(\gamma^l(S_q)) = r_q$ und somit $f \in \text{Cent}_{2\delta}(\gamma^l(S_q))$. (4)

Aus (3) und (4) sowie Lemma 1.28 folgt: $d(\gamma^l g, f) \leq 12\delta = r$. Also ist $\gamma^l g \in \overline{B}_r(f)$ für alle $l \in \{0, \dots, \Omega(r)\}$. Mit der Definition von Ω erhält man: $\#\{g, \gamma g, \dots, \gamma^{\Omega(r)} g\} \leq \Omega(r)$. Somit gibt es $u \neq v \in \{0, \dots, \Omega(r)\}$ mit $\gamma^u g = \gamma^v g$, also $\gamma^{|u-v|}g = g$. Da Γ frei auf X operiert, folgt $\gamma^{|u-v|} = \text{id}$ mit $|u - v| > 0$. Dies ist ein Widerspruch, da γ als hyperbolische Isometrie unendliche Ordnung hat. \square

Konvention. Für den Rest dieser Arbeit sei \mathcal{E} die Konstante aus obigem Satz.

Mit der Dreiecksungleichung folgt sofort:

Korollar 2.8. *Für alle $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $x \in X$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$|m - n| \cdot \mathcal{E} \leq d(\gamma^n x, \gamma^m x) \leq |n - m| \cdot d(x, \gamma x).$$

Korollar 2.9. *Sei $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch. Dann ist jede Quasi-Achse von γ eine $(\frac{\min d_\gamma}{\mathcal{E}}, \mathcal{E} + \min d_\gamma)$ -Quasi-Geodäte.*

Die Parameter $\frac{\min d_\gamma}{\mathcal{E}}$ und $\mathcal{E} + \min d_\gamma$ sind abhängig von γ . Dank Hyperbolizität von X kann man aber Quasi-Geodäten-Parameter finden, die nicht von γ abhängen.

Satz 2.10. *Sei $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch. Dann ist jede Quasi-Achse von γ eine $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -Quasi-Geodäte, wobei $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega, \delta) \geq 1$ und $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Omega, \delta) \geq 0$.*

Beweis. Gemäss Satz 1.13 existieren $H = H(\delta) > 0$, $\lambda' = \lambda'(\delta) \geq 1$ und $\mu' = \mu'(\delta) \geq 0$, so dass jede $(1, 0, H)$ -lokal-Quasi-Geodäte eine (λ', μ') -Quasi-Geodäte ist. Setze $\mathcal{F} := \max\{\frac{H}{\mathcal{E}}, \lambda'\}$, $\mathcal{G} := \max\{\mathcal{E} + H, \mu'\}$.

Seien nun $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ . Gemäss obigem Korollar ist c eine $(\frac{\min d_\gamma}{\mathcal{E}}, \mathcal{E} + \min d_\gamma)$ -Quasi-Geodäte. Falls $\min d_\gamma < H$ ist, ist c eine $(\frac{H}{\mathcal{E}}, \mathcal{E} + H)$ -Quasi-Geodäte und damit auch eine $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -Quasi-Geodäte.

Gleichzeitig ist c eingeschränkt auf jedes Teilintervall der Länge $\min d_\gamma$ minimierend, d. h. c ist eine $(1, 0, \min d_\gamma)$ -lokal-Quasi-Geodäte. Falls $\min d_\gamma \geq H$ ist, ist c also eine (λ', μ') -Quasi-Geodäte und damit auch eine $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -Quasi-Geodäte. \square

Zusammen mit Satz 1.14 und Satz 1.25 folgt:

Korollar 2.11. *Es gibt $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\Omega, \delta)$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$, so dass gilt: Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ .*

- (a) *Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$ und $g : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $c(a)$ nach $c(b)$. Dann ist $d_H(\text{Im}(c|_{[a,b]}), \text{Im}(g)) \leq \mathcal{Q}$.*
- (b) *Sei $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ ein Strahl mit $g(0) = c(0)$ und $g(\infty) = \gamma^+$. Dann ist $d_H(\text{Im}(c|_{\mathbb{R}_+}), \text{Im}(g)) \leq \mathcal{R}$.*
- (c) *Sei $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ . Dann ist $d_H(\text{Im}(c), \text{Im}(e)) \leq \mathcal{R}$.*

Bemerkung 2.12. Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $n, m \in \mathbb{N}^*$. Seien c_n eine Quasi-Achse von γ^n und c_m eine Quasi-Achse von γ^m . Sei e eine Achse von γ . Dann ist e auch eine Achse von γ^n und γ^m . Nach obigem Korollar gelten: $d_H(\text{Im}(e), \text{Im}(c_n)), d_H(\text{Im}(e), \text{Im}(c_m)) \leq \mathcal{R}$ und $d_H(\text{Im}(c_n), \text{Im}(c_m)) \leq 2\mathcal{R}$.

Konvention. Für den Rest dieser Arbeit seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ die Konstanten aus Satz 2.10 und Korollar 2.11. Satz 2.10 und Korollar 2.11 werden im Folgenden oft gebraucht, ohne dass explizit darauf hingewiesen wird.

2.2 Achsen

In diesem Abschnitt beweisen wir Satz 0.3, dafür brauchen wir aber einige technische Lemmata.

Lemma 2.13. *Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $L > \mathcal{F} \cdot (2\mathcal{Q} + \mathcal{G} + 16\delta) + 6\mathcal{Q} + 16\delta$. Seien $f : [0, nL] \rightarrow X$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -Quasi-Geodäte, so dass f eingeschränkt auf jedes Intervall der Länge L minimierend ist, und $x_i := f(iL)$ für alle $i = 0, \dots, n$. Weiter sei $[x_0, x_n]$ eine kürzeste Geodäte von $x_0 = f(0)$ nach $x_n = f(nL)$. Sei p_i eine Projektion von x_i auf $[x_0, x_n]$ für $i = 0, \dots, n$. Dann ist $d(x_i, p_i) \leq \mathcal{Q}$ für alle $i = 0, \dots, n$ und*

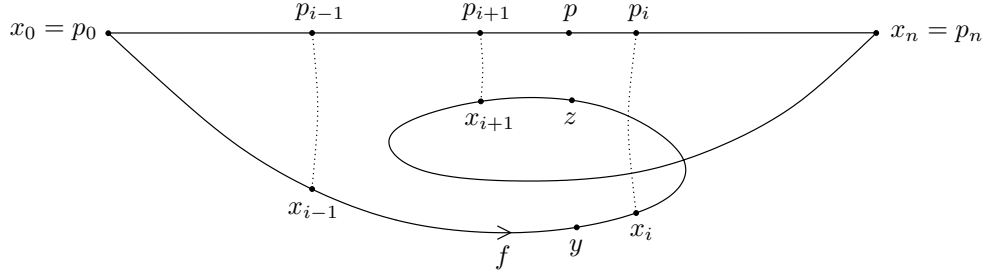


Abbildung 2: Zum Beweis von Lemma 2.13

$d(x_0, p_i) \leq d(x_0, p_{i+1})$ für alle $i = 0, \dots, n-1$. (Sprechweise: Auf $[x_0, x_n]$ gilt die Reihenfolge $[x_0 = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n = x_n]$.)

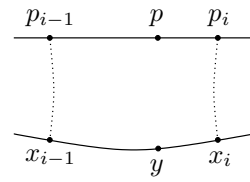
Beweis (nach [CDP], Chap. 3, Beweis von Lemma 1.12). Nach Wahl von \mathcal{Q} in Korollar 2.11 ist $d(x_i, p_i) \leq \mathcal{Q}$ für $i = 0, \dots, n$. Nehmen wir an, die Behauptung des Lemmas gelte nicht. Dann gibt es ein kleinstes $i \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $d(x_0, p_i) > d(x_0, p_{i+1})$. Wegen $p_0 = x_0$ ist $i \geq 1$, und für alle $j < i$ ist $d(x_0, p_j) \leq d(x_0, p_{j+1})$ (Abbildung 2).

Nach Voraussetzung ist $d(x_j, x_{j+1}) = L = L(f|_{[jL, (j+1)L]})$, also

$$d(p_j, p_{j+1}) \geq d(x_j, x_{j+1}) - d(x_j, p_j) - d(x_{j+1}, p_{j+1}) \geq L - 2\mathcal{Q}$$

für alle $j = 0, \dots, n-1$. Nach Wahl von i ist $d(x_0, p_i) \geq d(p_{i-1}, p_i) \geq L - 2\mathcal{Q}$. Somit existiert $p \in [x_0, p_i]$ mit $d(p, p_i) = \frac{L}{2} - \mathcal{Q} > 0$.

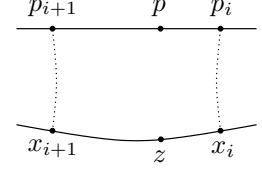
Es sind $p_{i-1}, p \in [x_0, p_i]$ mit $d(p_{i-1}, p_i) \geq L - 2\mathcal{Q}$ und $d(p, p_i) = \frac{L}{2} - \mathcal{Q}$. Somit ist $p \in [p_{i-1}, p_i]$. Weiter sind $[p_{i-1}, p_i]$ und $[x_{i-1}, x_i] = \text{Im}(f|_{[(j-1)L, jL]})$ minimierend. Somit gibt es $y \in [x_{i-1}, x_i]$ mit



$$\begin{aligned} d(p, y) &\leq \max\{d(p_{i-1}, x_{i-1}), d(p_i, x_i)\} + 8\delta \\ &\leq \mathcal{Q} + 8\delta. \end{aligned}$$

Es sind $p_{i+1}, p \in [x_0, p_i]$ mit $d(p_{i+1}, p_i) \geq L - 2\mathcal{Q}$ und $d(p, p_i) = \frac{L}{2} - \mathcal{Q}$. Somit ist $p \in [p_{i+1}, p_i]$, und man findet analog $z \in [x_i, x_{i+1}]$ mit

$$\begin{aligned} d(p, z) &\leq \max\{d(p_{i+1}, x_{i+1}), d(p_i, x_i)\} + 8\delta \\ &\leq \mathcal{Q} + 8\delta. \end{aligned}$$



Zusammen folgt:

$$d(z, y) \leq d(z, p) + d(p, y) \leq 2\mathcal{Q} + 16\delta.$$

Seien $v \leq w \in [0, nL]$ so, dass $y = f(v)$, $z = f(w)$ (Abbildung 2). Dann ist

$$\begin{aligned} L(f|_{[v, w]}) &= L(f|_{[v, iL]}) + L(f|_{[iL, w]}) = d(y, x_i) + d(x_i, z) \\ &\geq d(p, p_i) - d(p, y) - d(x_i, p_i) + d(p, p_i) - d(x_i, p_i) - d(z, p) \\ &\geq L - 6\mathcal{Q} - 16\delta. \end{aligned}$$

Da f eine $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -Quasi-Geodäte ist, folgt:

$$2\mathcal{Q} + 16\delta \geq d(z, y) \geq \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot L(f|_{[v, w]}) - \mathcal{G} \geq \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot (L - 6\mathcal{Q} - 16\delta) - \mathcal{G},$$

also $\mathcal{F} \cdot (2\mathcal{Q} + \mathcal{G} + 16\delta) + 6\mathcal{Q} + 16\delta \geq L$, und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Lemma 2.14. Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $x \in X$ mit $d_\gamma(x) = \min d_\gamma$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $h : [0, n \cdot \min d_\gamma] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von x nach $\gamma^n x$. Es gelte $\min d_\gamma > \mathcal{F} \cdot (2\mathcal{Q} + \mathcal{G} + 16\delta) + 6\mathcal{Q} + 16\delta$. Dann ist $d(\gamma^i x, h(i \cdot \min d_\gamma)) \leq 8\mathcal{Q}$ für alle $i = 0, \dots, n$.

Beweis. Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ mit $c(0) = x$. Sei p_i eine Projektion von $\gamma^i x = c(i \cdot \min d_\gamma)$ auf $\text{Im}(h)$ für $i = 0, \dots, n$. Dann gilt nach obigem Lemma: $d(\gamma^i x, p_i) \leq \mathcal{Q}$ für alle $i = 0, \dots, n$ und $d(x, p_i) \leq d(x, p_{i+1})$ für alle $i = 0, \dots, n-1$.

Nehmen wir an, es gebe $i \in \{0, \dots, n\}$ mit $d(x, p_i) > \frac{i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q}$. Sei i die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, d. h.

$$\begin{aligned} d(x, p_i) &> \frac{i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q}, \\ d(x, p_j) &\leq \frac{j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q} \quad \forall j < i. \end{aligned} \tag{5}$$

Wegen $p_0 = x$, $p_n = \gamma^n x$ ist $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Speziell muss $n \geq 2$ sein.

Behauptung. Dann gilt für alle $r = 1, \dots, n-1$:

- (a) $n - ri \in \{0, \dots, n\}$ und $d(x, p_{n-ri}) < \frac{n-ri}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 3\mathcal{Q}$
- (b) $i < \frac{n}{r+1}$

Beweis der Behauptung (Induktion nach r). Induktionsverankerung $r = 1$:

- (a) $n - i \in \{0, \dots, n\}$ ist klar, somit ist p_{n-i} definiert. Wegen (5) gilt:

$$\begin{aligned} d(\gamma^n x, p_{n-i}) &\geq d(\gamma^n x, \gamma^{n-i} x) - \mathcal{Q} = d(\gamma^i x, x) - \mathcal{Q} \\ &\geq d(p_i, x) - 2\mathcal{Q} > \frac{i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 3\mathcal{Q}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} d(x, p_{n-i}) &= d(x, \gamma^n x) - d(\gamma^n x, p_{n-i}) \\ &< d(x, \gamma^n x) - \frac{i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 3\mathcal{Q} \\ &= \frac{n-i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 3\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

- (b) Nehmen wir an, es sei $i \geq \frac{n}{2}$. Dann ist $0 \leq n - i \leq \frac{n}{2} \leq i \leq n$, also gilt auf h die Reihenfolge $[x, p_{n-i}, p_i, \gamma^n x]$. Aus (5) und (a) folgt:

$$\begin{aligned} d(p_i, p_{n-i}) &= d(x, p_i) - d(x, p_{n-i}) \\ &> \frac{i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - \frac{n-i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 8\mathcal{Q} \\ &= \frac{2i-n}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 8\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Setze $j := 2i - n$. Wegen $1 \leq \frac{n}{2} \leq i \leq n-1 < n$ ist $j \in \{0, \dots, n\}$ mit $j < i$ und

$$\begin{aligned} d(x, p_j) &= d(x, p_{2i-n}) \geq d(x, \gamma^{2i-n} x) - \mathcal{Q} \\ &= d(\gamma^{n-i} x, \gamma^i x) - \mathcal{Q} \geq d(p_{n-i}, p_i) - 3\mathcal{Q} \\ &> \frac{2i-n}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q} = \frac{j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (5), somit muss $i < \frac{n}{2}$ sein.

Induktionsschritt $r-1 \longrightarrow r$ ($2 \leq r \leq n-1$). Nach Induktionsvoraussetzung für $r-1$ gelten:

- (a') $n - (r - 1)i \in \{0, \dots, n\}$ und $d(x, p_{n-(r-1)i}) < \frac{n-(r-1)i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 3\mathcal{Q}$
 (b') $i < \frac{n}{r}$

Wir zeigen nun (a), (b) für r .

- (a) Nach (b') ist $n - ri \in \{0, \dots, n\}$, also p_{n-ri} definiert und $n - (r - 1)i > i$. Auf h gilt somit die Reihenfolge $[x, p_i, p_{n-(r-1)i}, \gamma^n x]$. Aus (a') und (5) folgt:

$$\begin{aligned} d(p_i, p_{n-(r-1)i}) &= d(x, p_{n-(r-1)i}) - d(x, p_i) \\ &< \frac{n - (r - 1)i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - \frac{i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 8\mathcal{Q} \\ &= \frac{n - ri}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 8\mathcal{Q}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} d(x, p_{n-ri}) &\leq d(x, \gamma^{n-ri} x) + \mathcal{Q} = d(\gamma^i x, \gamma^{n-(r-1)i} x) + \mathcal{Q} \\ &\leq d(p_i, p_{n-(r-1)i}) + 3\mathcal{Q} < \frac{n - ri}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 5\mathcal{Q} \\ &\leq \frac{n - ri}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 3\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

- (b) Nehmen wir an, es gelte $i \geq \frac{n}{r+1}$. Dann ist $n - ri \leq i$, also gilt auf h die Reihenfolge $[x, p_{n-ri}, p_i, \gamma^n x]$. Aus (5) und (a) folgt:

$$\begin{aligned} d(p_i, p_{n-ri}) &= d(x, p_i) - d(x, p_{n-ri}) \\ &> \frac{i}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - \frac{n - ri}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 8\mathcal{Q} \\ &= \frac{(r + 1)i - n}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 8\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Setze $j := (r + 1)i - n$. Nach (b') und Annahme ist $\frac{n}{r+1} \leq i < \frac{n}{r}$, also $j \in \{0, \dots, n\}$ mit $j < i$ und

$$\begin{aligned} d(x, p_j) &= d(x, p_{(r+1)i-n}) \geq d(x, \gamma^{(r+1)i-n} x) - \mathcal{Q} \\ &= d(\gamma^{n-ri} x, \gamma^i x) - \mathcal{Q} \geq d(p_{n-ri}, p_i) - 3\mathcal{Q} \\ &> \frac{(r + 1)i - n}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q} = \frac{j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (5), somit muss $i < \frac{n}{r+1}$ gelten. \square Beh.

Insbesondere folgt nun aus (b) für $r = n - 1$: $i < 1$. Wir haben aber schon gesehen, dass $i \geq 1$ sein muss. Somit war die Annahme falsch, und für alle $j \in \{0, \dots, n\}$ gilt:

$$d(x, p_j) \leq \frac{j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) + 5\mathcal{Q}.$$

Wendet man dies auf $n - j$ an, folgt:

$$\begin{aligned} d(x, p_j) &= d(x, \gamma^n x) - d(\gamma^n x, p_j) \geq d(x, \gamma^n x) - d(\gamma^n x, \gamma^j x) - \mathcal{Q} \\ &= d(x, \gamma^n x) - d(\gamma^{n-j} x, x) - \mathcal{Q} \geq d(x, \gamma^n x) - d(p_{n-j}, x) - 2\mathcal{Q} \\ &\geq d(x, \gamma^n x) - \frac{n-j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 7\mathcal{Q} = \frac{j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) - 7\mathcal{Q} \end{aligned}$$

für alle $j \in \{0, \dots, n\}$. Zusammen erhält man:

$$\left| d(x, p_j) - \frac{j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) \right| \leq 7\mathcal{Q},$$

also

$$\begin{aligned} d(p_j, h(j \cdot \min d_\gamma)) &= \left| d(x, p_j) - d(x, h(j \cdot \min d_\gamma)) \right| \\ &= \left| d(x, p_j) - \frac{j}{n} \cdot d(x, \gamma^n x) \right| \\ &\leq 7\mathcal{Q} \end{aligned}$$

und

$$d(\gamma^j x, h(j \cdot \min d_\gamma)) \leq d(\gamma^j x, p_j) + d(p_j, h(j \cdot \min d_\gamma)) \leq 8\mathcal{Q}$$

für alle $j = 0, \dots, n$. □

Zur Abkürzung setzen wir für den Rest dieses Abschnitts

$$J := \mathcal{F} \cdot (2\mathcal{Q} + \mathcal{G} + 16\delta) + 6\mathcal{Q} + 16\delta,$$

$$L := \frac{1}{\mathcal{E}} \cdot (J + 1).$$

Lemma 2.15. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $x \in X$ mit $d(x, \gamma x) = \min d_\gamma$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Es gelte $\min d_\gamma > J$. Sei $c_n : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ^n , $y := c_n(0)$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$:*

$$d(\gamma^i x, c_n(\frac{i}{n} \cdot \min d_{\gamma^n})) \leq d(x, y) + 8\mathcal{Q} + 8\delta.$$

Beweis. Sei $h : [0, n \cdot \min d_\gamma] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von x nach $\gamma^n x$. Nach obigem Lemma ist $d(\gamma^i x, h(i \cdot \min d_\gamma)) \leq 8\mathcal{Q}$ für $i = 0, \dots, n$.

Setze nun $\tilde{c}_n : \mathbb{R} \rightarrow X$, $\tilde{c}_n(t) := c_n(t \cdot \frac{\min d_{\gamma^n}}{n \cdot \min d_\gamma})$. Dann ist $\tilde{c}_n(0) = y$ und $\tilde{c}_n(n \cdot \min d_\gamma) = \gamma^n y$. Da \tilde{c}_n auf $[0, n \cdot \min d_\gamma]$ minimierend ist, gilt für alle $t \in [0, n \cdot \min d_\gamma]$:

$$d(h(t), \tilde{c}_n(t)) \leq \max\{d(x, y), d(\gamma^n x, \gamma^n y)\} + 8\delta = d(x, y) + 8\delta.$$

Für alle $i = 0, \dots, n$ folgt:

$$\begin{aligned} d(\gamma^i x, c_n(\frac{i}{n} \cdot \min d_{\gamma^n})) &\leq d(\gamma^i x, h(i \cdot \min d_\gamma)) + d(h(i \cdot \min d_\gamma), \tilde{c}_n(i \cdot \min d_\gamma)) \\ &\leq d(x, y) + 8\mathcal{Q} + 8\delta. \end{aligned}$$

Da c_n durch γ^n um $\min d_{\gamma^n}$ translatiert wird, gilt dies für alle $i \in \mathbb{Z}$. \square

Lemma 2.16. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $x \in X$ mit $d(x, \gamma x) = \min d_\gamma$. Es gelte $\min d_\gamma \leq J$. Seien $v \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq v \leq \lceil L \rceil$ und $c_v : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ^v , $y := c_v(0)$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$:*

$$d(\gamma^i x, c_v(\frac{i}{v} \cdot \min d_{\gamma^v})) \leq 2J(L+1) + d(x, y).$$

Beweis. Für $i = 0, \dots, v$ folgt die Behauptung aus der Dreiecksungleichung. Da c_v durch γ^v um $\min d_{\gamma^v}$ translatiert wird, gilt sie für alle $i \in \mathbb{Z}$. \square

Satz 2.17. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $x \in X$ mit $d(x, \gamma x) = \min d_\gamma$. Seien $m \in \mathbb{N}^*$ und $c_m : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ^m , $y := c_m(0)$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\begin{aligned} d(\gamma^i x, c_m(\frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m})) &\leq (4L+2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta \\ &\quad + \mathcal{F} \cdot [6\mathcal{R} + \mathcal{G} + d(x, y)]. \end{aligned}$$

Beweis. Ist $\min d_\gamma > J$, folgt die Behauptung aus Lemma 2.15. Sei also $\min d_\gamma \leq J$. Setze $\lambda := \lceil L \rceil \in \mathbb{N}^*$. Es gibt eindeutige $p, v \in \mathbb{N}$ mit $m = p\lambda + v$ und $0 \leq v < \lambda$. Ist $p = 0$, also $m = v$, folgt die Behauptung aus Lemma 2.16. Sei also $p \geq 1$.

Seien $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ mit $c(0) = x$ und $c_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ^λ . Wegen $d_H(\text{Im}(c), \text{Im}(c_\lambda)) \leq 2\mathcal{R}$ gibt es $z \in \text{Im}(c_\lambda)$

mit $d(x, z) \leq 2\mathcal{R}$. Sei OE c_λ so parametrisiert, dass $c_\lambda(0) = z$ ist. Gemäss Lemma 2.16 gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$:

$$d(\gamma^i x, c_\lambda(\frac{i}{\lambda} \cdot \min d_{\gamma^\lambda})) \leq 2J(L+1) + d(x, z) \leq 2J(L+1) + 2\mathcal{R}. \quad (6)$$

Sei $c_{p\lambda}$ eine Quasi-Achse von $\gamma^{p\lambda}$. Wegen $d_H(\text{Im}(c_\lambda), \text{Im}(c_{p\lambda})) \leq 2\mathcal{R}$ gibt es $u \in \text{Im}(c_{p\lambda})$ mit $d(z, u) \leq 2\mathcal{R}$. Sei OE $c_{p\lambda}$ so parametrisiert, dass $c_{p\lambda}(0) = u$ ist. Nach Satz 2.7 und Definition von L , λ ist $\min d_{\gamma^\lambda} = d(z, \gamma^\lambda z) > J$. Somit folgt aus Lemma 2.15 (auf γ^λ und p angewendet) für alle $i \in \mathbb{Z}$:

$$d(\gamma^{i\lambda} z, c_{p\lambda}(\frac{i}{p} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}})) \leq d(z, u) + 8\mathcal{Q} + 8\delta \leq 2\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 8\delta.$$

Setze nun $\tilde{c}_{p\lambda} : \mathbb{R} \rightarrow X$, $\tilde{c}_{p\lambda}(s) := c_{p\lambda}(s \cdot \frac{\min d_{\gamma^{p\lambda}}}{p \cdot \min d_{\gamma^\lambda}})$. Dann ist $\tilde{c}_{p\lambda}(0) = u$, $\tilde{c}_{p\lambda}(p \cdot \min d_{\gamma^\lambda}) = \gamma^{p\lambda} u$, und für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

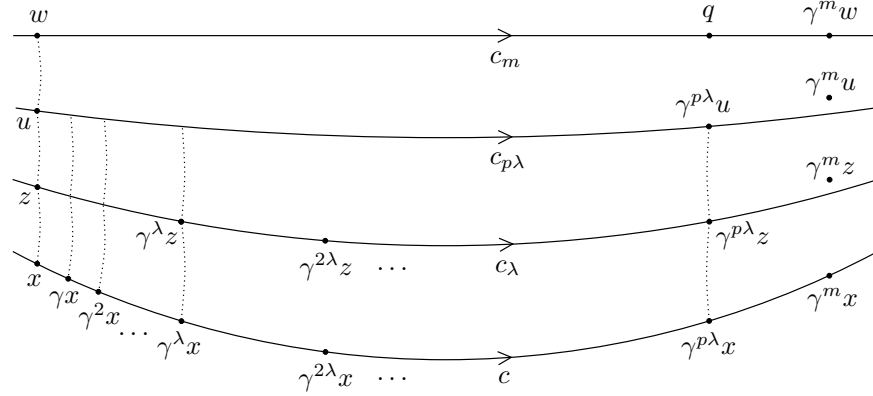
$$d(\gamma^{i\lambda} z, \tilde{c}_{p\lambda}(i \cdot \min d_{\gamma^\lambda})) = d(\gamma^{i\lambda} z, c_{p\lambda}(\frac{i}{p} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}})) \leq 2\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 8\delta.$$

Sei $i \in \mathbb{Z}$. Es gibt $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha \cdot \min d_{\gamma^\lambda} \leq \frac{i}{\lambda} \cdot \min d_{\gamma^\lambda} \leq (\alpha+1) \cdot \min d_{\gamma^\lambda}$, und $c_\lambda, \tilde{c}_{p\lambda}$ sind eingeschränkt auf jedes Intervall der Länge $\min d_{\gamma^\lambda}$ minimierend. Somit gilt:

$$\begin{aligned} & d(c_\lambda(\frac{i}{\lambda} \cdot \min d_{\gamma^\lambda}), \tilde{c}_{p\lambda}(\frac{i}{\lambda} \cdot \min d_{\gamma^\lambda})) \\ & \leq \max \left\{ d(c_\lambda(\alpha \cdot \min d_{\gamma^\lambda}), \tilde{c}_{p\lambda}(\alpha \cdot \min d_{\gamma^\lambda})), \right. \\ & \quad \left. d(c_\lambda((\alpha+1) \cdot \min d_{\gamma^\lambda}), \tilde{c}_{p\lambda}((\alpha+1) \cdot \min d_{\gamma^\lambda})) \right\} + 8\delta \\ & = \max \left\{ d(\gamma^{\alpha\lambda} z, \tilde{c}_{p\lambda}(\alpha \cdot \min d_{\gamma^\lambda})), \right. \\ & \quad \left. d(\gamma^{(\alpha+1)\lambda} z, \tilde{c}_{p\lambda}((\alpha+1) \cdot \min d_{\gamma^\lambda})) \right\} + 8\delta \\ & \leq 2\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 16\delta. \end{aligned}$$

Mit (6) folgt für alle $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} & d(\gamma^i x, c_{p\lambda}(\frac{i}{p\lambda} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}})) \\ & \leq d(\gamma^i x, c_\lambda(\frac{i}{\lambda} \cdot \min d_{\gamma^\lambda})) + d(c_\lambda(\frac{i}{\lambda} \cdot \min d_{\gamma^\lambda}), \tilde{c}_{p\lambda}(\frac{i}{\lambda} \cdot \min d_{\gamma^\lambda})) \\ & \leq 2J(L+1) + 4\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 16\delta. \end{aligned} \quad (7)$$

Abbildung 3: Die Quasi-Achsen c , c_λ , $c_{p\lambda}$, c_m

Da c_m eine Quasi-Achse von γ^m ist, gilt $d_H(\text{Im}(c_m), \text{Im}(c_{p\lambda})) \leq 2\mathcal{R}$. (Ist $v = 0$, also $m = p\lambda$, können c_m und $c_{p\lambda}$ trotzdem verschiedene Quasi-Achsen von $\gamma^m = \gamma^{p\lambda}$ bezeichnen.) Somit gibt es $S \in \mathbb{R}$ mit $d(c_m(S), u) \leq 2\mathcal{R}$. Setze $w := c_m(S)$ und $q := c_m(S + \frac{p\lambda}{m} \cdot \min d_{\gamma^m})$ (Abbildung 3). Dann ist

$$\begin{aligned} d(q, \gamma^{p\lambda} u) &\leq d(q, \gamma^m w) + d(\gamma^m w, \gamma^m u) + d(\gamma^m u, \gamma^m z) + d(\gamma^m z, \gamma^m x) \\ &\quad + d(\gamma^m x, \gamma^{p\lambda} x) + d(\gamma^{p\lambda} x, \gamma^{p\lambda} z) + d(\gamma^{p\lambda} z, \gamma^{p\lambda} u) \\ &\leq d(q, \gamma^m w) + d(\gamma^v x, x) + 10\mathcal{R}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} d(\gamma^v x, x) &\leq v \cdot d(\gamma x, x) = v \cdot \min d_\gamma, \\ d(q, \gamma^m w) &= d(c_m(S + \frac{p\lambda}{m} \cdot \min d_{\gamma^m}), c_m(S + \min d_{\gamma^m})) \\ &= (1 - \frac{p\lambda}{m}) \cdot \min d_{\gamma^m} = \frac{v}{m} \cdot \min d_{\gamma^m} \leq v \cdot \min d_\gamma. \end{aligned}$$

Mit $v < \lambda = \lceil L \rceil$ und $\min d_\gamma \leq J$ folgt:

$$d(q, \gamma^{p\lambda} u) \leq 2v \cdot \min d_\gamma + 10\mathcal{R} \leq 2(\lambda - 1) \cdot \min d_\gamma + 10\mathcal{R} \leq 2LJ + 10\mathcal{R}.$$

Setze nun $\tilde{c}_m : \mathbb{R} \rightarrow X$, $\tilde{c}_m(t) := c_m(S + t \cdot \frac{p\lambda \cdot \min d_{\gamma^m}}{m \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}}})$. Dann ist $\tilde{c}_m(0) = w$, $\tilde{c}_m(\min d_{\gamma^{p\lambda}}) = q$, und \tilde{c}_m , $c_{p\lambda}$ sind auf $[0, \min d_{\gamma^{p\lambda}}]$ minimierend. Somit gilt für alle $i = 0, \dots, p\lambda$:

$$\begin{aligned}
& d\left(\tilde{c}_m\left(\frac{i}{p\lambda} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}}\right), c_{p\lambda}\left(\frac{i}{p\lambda} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}}\right)\right) \\
& \leq \max\{d(w, u), d(q, \gamma^{p\lambda}u)\} + 8\delta \leq 2LJ + 10\mathcal{R} + 8\delta.
\end{aligned}$$

Mit (7) folgt für alle $i = 0, \dots, p\lambda$:

$$\begin{aligned}
& d\left(\gamma^i x, c_m\left(S + \frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m}\right)\right) \\
& \leq d\left(\gamma^i x, c_{p\lambda}\left(\frac{i}{p\lambda} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}}\right)\right) + d\left(c_{p\lambda}\left(\frac{i}{p\lambda} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}}\right), \tilde{c}_m\left(\frac{i}{p\lambda} \cdot \min d_{\gamma^{p\lambda}}\right)\right) \\
& \leq (4L + 2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta.
\end{aligned} \tag{8}$$

Weiter gilt für alle $i \in \{p\lambda, \dots, m = p\lambda + v\}$: $m - i \leq v \leq \lambda - 1 \leq L$, also

$$\begin{aligned}
& d(\gamma^i x, \gamma^m x) = d(x, \gamma^{m-i} x) \leq (m - i) \cdot \min d_\gamma \leq LJ, \\
& d(\gamma^m w, c_m\left(S + \frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m}\right)) \\
& \quad = d(c_m(S + \min d_{\gamma^m}), c_m\left(S + \frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m}\right)) \\
& \quad = \frac{m-i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m} \leq (m - i) \cdot \min d_\gamma \leq LJ.
\end{aligned}$$

Damit folgt für alle $i = p\lambda, \dots, m$:

$$\begin{aligned}
& d\left(\gamma^i x, c_m\left(S + \frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m}\right)\right) \\
& \leq d(\gamma^i x, \gamma^m x) + d(\gamma^m x, \gamma^m z) + d(\gamma^m z, \gamma^m u) \\
& \quad + d(\gamma^m u, \gamma^m w) + d(\gamma^m w, c_m\left(S + \frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m}\right)) \\
& \leq 2LJ + 6\mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (8) erhält man:

$$d\left(\gamma^i x, c_m\left(S + \frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m}\right)\right) \leq (4L + 2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta$$

für alle $i = 0, \dots, m$. Da c_m durch γ^m um $\min d_{\gamma^m}$ translatiert wird, gilt diese Ungleichung für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Da c_m eine $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -Quasi-Geodäte ist, ist

$$\begin{aligned}
|S| & \leq \mathcal{F} \cdot [d(c_m(0), c_m(S)) + \mathcal{G}] \\
& \leq \mathcal{F} \cdot [d(y, x) + d(x, z) + d(z, u) + d(u, w) + \mathcal{G}] \\
& \leq \mathcal{F} \cdot [d(x, y) + 6\mathcal{R} + \mathcal{G}].
\end{aligned}$$

Somit folgt für alle $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} & d(\gamma^i x, c_m(\frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m})) \\ & \leq d(\gamma^i x, c_m(S + \frac{i}{m} \cdot \min d_{\gamma^m})) + |S| \\ & \leq (4L + 2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta + \mathcal{F} \cdot [d(x, y) + 6\mathcal{R} + \mathcal{G}]. \quad \square \end{aligned}$$

Nun können wir Satz 0.3 beweisen.

Satz 2.18. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $e : \mathbb{R} \longrightarrow X$ eine Achse von γ . Dann gilt für alle $z \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$:*

$$d(\gamma^z e(t), e(t + z \cdot d_{\gamma^\infty})) \leq \mathcal{S},$$

wobei $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Setze

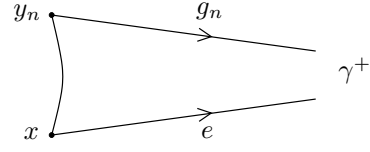
$$\mathcal{S} := (4L + 2)J + 18\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 104\delta + \mathcal{F} \cdot (8\mathcal{R} + \mathcal{G}).$$

Wir zeigen die Behauptung für $t = 0$ und alle $z \in \mathbb{Z}$. Für $t \in \mathbb{R}$ beliebig folgt sie durch Umparametrisierung. Sei $x := e(0)$, sei $c_n : \mathbb{R} \longrightarrow X$ eine Quasi-Achse von γ^n für jedes $n \in \mathbb{N}^*$. Wegen $d_H(\text{Im}(c_n), \text{Im}(e)) \leq \mathcal{R}$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ein $y_n \in \text{Im}(c_n)$ mit $d(x, y_n) \leq \mathcal{R}$. Sei OE c_n so parametrisiert, dass $y_n = c_n(0)$.

Für $j \in \mathbb{N}$ setze $C^j := \{c_n|_{[-j, j]} : [-j, j] \longrightarrow X \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Da alle c_n nach Bogenlänge parametrisiert sind, ist jedes C^j gleichgradig stetig, und da X eigentlich ist, hat $\{c_n|_{[-j, j]}(t) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ kompakten Abschluss in X für alle $t \in [-j, j]$, für alle $j \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Arzela-Ascoli ([D], Chap. XII, Theorem 6.4) und [D], Chap. XII, 8.2(3) folgt: Jedes C^j ist relativ kompakt in $X^{[-j, j]}$ bezüglich der metrischen Topologie. Somit hat jede Folge in C^j eine Teilfolge, die gleichmässig gegen eine stetige Abbildung $[-j, j] \longrightarrow X$ konvergiert, $j \in \mathbb{N}$.

Mit dem Cantorschen Diagonalverfahren (vgl. [GH], Chap. 5, Beweis von Theorem 25) findet man eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von \mathbb{N}^* und eine nach Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodäte $c : \mathbb{R} \longrightarrow X$, so dass c_{n_k} punktweise gegen c konvergiert für $k \rightarrow \infty$. Wegen $c_{n_k}(0) = y_{n_k} \in \overline{B}_{\mathcal{R}}(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist auch $c(0) \in \overline{B}_{\mathcal{R}}(x)$.

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Sei $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ ein Strahl von $y_n = c_n(0)$ nach $\gamma^+ = c_n(\infty)$. Dann ist $d_H(\text{Im}(g_n), \text{Im}(c_n|_{\mathbb{R}_+})) \leq \mathcal{R}$. Ausserdem ist $e(\infty) = \gamma^+ = g_n(\infty)$. Nach Satz 1.24(c) erfüllt das Dreieck $\triangle(x, y_n, \gamma^+)$ die Bedingung von Rips mit 24δ . Wegen $d(x, y_n) \leq \mathcal{R}$ folgt: $d_H(\text{Im}(e|_{\mathbb{R}_+}), \text{Im}(g_n)) \leq \mathcal{R} + 24\delta$. Zusammen erhält man: $d_H(\text{Im}(c_n|_{\mathbb{R}_+}), \text{Im}(e|_{\mathbb{R}_+})) \leq 2\mathcal{R} + 24\delta$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.



Da c_{n_k} punktweise gegen c konvergiert, gibt es für jedes $r \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $d(c_{n_k}(r), c(r)) \leq \mathcal{R}$. Weiter gibt es $s_r \geq 0$ mit $d(c_{n_k}(r), e(s_r)) \leq 2\mathcal{R} + 24\delta$, also $d(c(r), e(s_r)) \leq 3\mathcal{R} + 24\delta$. Nach Bemerkung 1.20 ist $(e(s_r))_{r \in \mathbb{N}} \in S_\infty X$ mit $e(s_r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} c(\infty)$. Speziell folgt $s_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$ und somit $e(s_r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e(\infty)$. Also muss $c(\infty) = e(\infty) = \gamma^+$ sein. Analog zeigt man $c(-\infty) = e(-\infty) = \gamma^-$, somit ist c eine Achse von γ .

Seien nun $z \in \mathbb{Z}^*$ und $\varepsilon > 0$. Gemäss Lemma 1.41(b) gibt es $K_1 \in \mathbb{N}$ mit $|d_{\gamma^\infty} - \frac{1}{n_k} \cdot \min d_{\gamma^{n_k}}| < \frac{\varepsilon}{2|z|}$ für alle $k \geq K_1$. Da $c_{n_k}(z \cdot d_{\gamma^\infty})$ gegen $c(z \cdot d_{\gamma^\infty})$ konvergiert, gibt es $K_2 \in \mathbb{N}$ mit $d(c_{n_k}(z \cdot d_{\gamma^\infty}), c(z \cdot d_{\gamma^\infty})) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq K_2$. Setze $K_3 := \max\{K_1, K_2\}$. Dann folgt für alle $k \geq K_3$:

$$\begin{aligned} & d(c(z \cdot d_{\gamma^\infty}), c_{n_k}(\frac{z}{n_k} \cdot \min d_{\gamma^{n_k}})) \\ & \leq d(c(z \cdot d_{\gamma^\infty}), c_{n_k}(z \cdot d_{\gamma^\infty})) + d(c_{n_k}(z \cdot d_{\gamma^\infty}), c_{n_k}(\frac{z}{n_k} \cdot \min d_{\gamma^{n_k}})) \\ & \leq d(c(z \cdot d_{\gamma^\infty}), c_{n_k}(z \cdot d_{\gamma^\infty})) + |z| \cdot |d_{\gamma^\infty} - \frac{1}{n_k} \cdot \min d_{\gamma^{n_k}}| \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

c_1 ist eine Quasi-Achse von γ mit $y_1 = c_1(0) \in \overline{B}_{\mathcal{R}}(x)$, c_{n_k} ist eine Quasi-Achse von γ^{n_k} mit $y_{n_k} = c_{n_k}(0) \in \overline{B}_{\mathcal{R}}(x)$. Also ist $d(y_1, y_{n_k}) \leq 2\mathcal{R}$, und aus Satz 2.17 folgt:

$$d(\gamma^z y_1, c_{n_k}(\frac{z}{n_k} \cdot \min d_{\gamma^{n_k}})) \leq (4L + 2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta + \mathcal{F}(8\mathcal{R} + \mathcal{G}).$$

Damit gilt für $k \geq K_3$:

$$\begin{aligned} & d(\gamma^z y_1, c(z \cdot d_{\gamma^\infty})) \\ & \leq d(\gamma^z y_1, c_{n_k}(\frac{z}{n_k} \cdot \min d_{\gamma^{n_k}})) + d(c_{n_k}(\frac{z}{n_k} \cdot \min d_{\gamma^{n_k}}), c(z \cdot d_{\gamma^\infty})) \\ & \leq (4L + 2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta + \mathcal{F}(8\mathcal{R} + \mathcal{G}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig. Somit ist

$$d(\gamma^z y_1, c(z \cdot d_{\gamma^\infty})) \leq (4L + 2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta + \mathcal{F}(8\mathcal{R} + \mathcal{G}),$$

und wegen $c(0), c_1(0) \in \overline{B}_{\mathcal{R}}(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} d(\gamma^z c(0), c(z \cdot d_{\gamma^\infty})) &\leq d(\gamma^z c(0), \gamma^z c_1(0)) + d(\gamma^z y_1, c(z \cdot d_{\gamma^\infty})) \\ &\leq (4L + 2)J + 16\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta + \mathcal{F}(8\mathcal{R} + \mathcal{G}). \end{aligned}$$

e und c sind beides Achsen von γ . Nach Satz 1.24(b) gibt es $u \in \mathbb{R}$ mit $d(e(t), c(t - u)) \leq 40\delta$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dabei ist

$$|u| = d(c(0), c(-u)) \leq d(c(0), x) + d(e(0), c(-u)) \leq \mathcal{R} + 40\delta.$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} d(\gamma^z e(0), e(z \cdot d_{\gamma^\infty})) &\leq d(\gamma^z x, \gamma^z c(0)) + d(\gamma^z c(0), c(z \cdot d_{\gamma^\infty})) \\ &\quad + d(c(z \cdot d_{\gamma^\infty}), c(z \cdot d_{\gamma^\infty} - u)) + d(c(z \cdot d_{\gamma^\infty} - u), e(z \cdot d_{\gamma^\infty})) \\ &\leq (4L + 2)J + 18\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 104\delta + \mathcal{F}(8\mathcal{R} + \mathcal{G}) \\ &= \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Dabei war $z \in \mathbb{Z}^*$ beliebig. Für $z = 0$ ist die Aussage klar. \square

Konvention. Für den Rest dieser Arbeit sei \mathcal{S} die Konstante aus obigem Satz.

Bemerkung 2.19. Im Beweis von Satz 0.2 werde ich hauptsächlich mit Achsen arbeiten. Man kann diesen Beweis auch ohne die Hilfe von Satz 2.18 führen, indem man Quasi-Achsen anstelle von Achsen verwendet. Dass Quasi-Achsen global nicht minimierend sind, führt aber zu technischen Problemen, welche den Beweis deutlich komplizierter machen.

3 Vorbereitungen für den Beweis von Satz 0.2

Dieses Kapitel enthält einige Vorbereitungen für den Beweis von Satz 0.2. Wir untersuchen zuerst Projektionen auf Mengen mit kleiner Verschiebung unter beliebigen Isometrien und Projektionen auf Achsen von hyperbolischen Isometrien. Die hier angegebenen Abschätzungen werden es in Kapitel 4 ermöglichen, das Ergebnis von Satz 0.2 linear in den gewünschten Grössen zu erhalten.

Danach führen wir ein Häufungsargument für Mengen mit kleiner Verschiebung unter gegebenen Isometrien durch. Dieses Argument gilt für beliebige Isometrien, wird im Beweis von Satz 0.2 aber nur für elliptische gebraucht.

3.1 Projektion auf Mengen mit kleiner Verschiebung

Satz 3.1. *Seien $k > 12$ und $\gamma \in \Gamma$, gelte $K_\gamma := \{x \in X \mid d(x, \gamma x) \leq k\delta\} \neq \emptyset$. Dann folgt für alle $x \in X$: $d(x, K_\gamma) \leq \frac{1}{2} \cdot d(x, \gamma x) + 6\delta$.*

Beweis. Sei $x \in X$. Wir können OE $x \notin K_\gamma$ annehmen, d. h. $d(x, \gamma x) > k\delta$. Sei y eine Projektion von x auf K_γ . Dann ist γy eine Projektion von γx auf $\gamma(K_\gamma) = K_\gamma$. Sei $[x, y]$ eine kürzeste Geodäte von x nach y , dann ist $[\gamma x, \gamma y] := \gamma[x, y]$ eine kürzeste Geodäte von γx nach γy .

Sei $g : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von y nach γy . g wird mit $[y, \gamma y]$ bezeichnet werden. Sei $t \in [0, 1]$ beliebig.

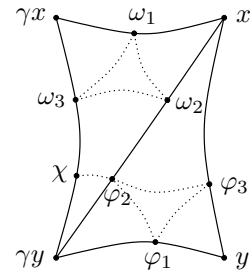
$$\begin{aligned} d(g(t), \gamma g(t)) &\leq d(g(t), g(1)) + d(\gamma g(0), \gamma g(t)) \\ &= d(g(0), g(1)) = d(y, \gamma y) \leq k\delta, \end{aligned}$$

da $y \in K_\gamma$. Somit ist $[y, \gamma y] \subset K_\gamma$.

Wähle noch kürzeste Geodäten $[x, \gamma x]$ und $[x, \gamma y]$. Seien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Tripel-Punkte des Dreiecks $\triangle(x, \gamma x, \gamma y)$ und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ diejenigen des Dreiecks $\triangle(x, y, \gamma y)$ (siehe Abbildung rechts).

Nehmen wir an, es gelte $d(\gamma y, \omega_2) > d(\gamma y, \varphi_2)$. Da y eine Projektion von x auf K_γ ist und $\varphi_1 \in [y, \gamma y] \subset K_\gamma$, folgt:

$$\begin{aligned} d(y, \varphi_1) &= d(y, \varphi_3) = d(y, x) - d(x, \varphi_3) \\ &\leq d(x, \varphi_1) - d(x, \varphi_3) \leq d(\varphi_1, \varphi_3) \leq 4\delta. \end{aligned}$$



Nach Annahme gibt es $\chi \in [\gamma y, \omega_3]$ mit $d(\gamma y, \chi) = d(\gamma y, \varphi_2)$. Da γy eine Projektion von γx auf K_γ ist und $\varphi_1 \in [y, \gamma y] \subset K_\gamma$, folgt:

$$\begin{aligned} d(\gamma y, \varphi_1) &= d(\gamma y, \chi) = d(\gamma y, \gamma x) - d(\gamma x, \chi) \leq d(\gamma x, \varphi_1) - d(\gamma x, \chi) \\ &\leq d(\varphi_1, \chi) \leq d(\varphi_1, \varphi_2) + d(\varphi_2, \chi) \leq 8\delta. \end{aligned}$$

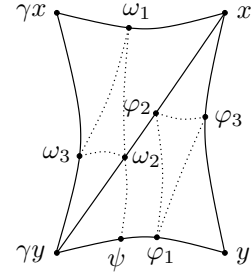
Zusammen erhält man:

$$d(y, \gamma y) = d(y, \varphi_1) + d(\varphi_1, \gamma y) \leq 12\delta.$$

Andererseits: Da y eine Projektion von $x \notin K_\gamma$ auf K_γ ist, muss $y \in \partial K_\gamma$ sein. Somit ist $d(y, \gamma y) = k\delta > 12\delta$, und dies ist ein Widerspruch.

Also ist $d(\gamma y, \omega_2) \leq d(\gamma y, \varphi_2)$. Sei $\psi \in [\gamma y, \varphi_1]$ der Punkt mit $d(\gamma y, \psi) = d(\gamma y, \omega_2)$. Da γy eine Projektion von γx auf K_γ ist und $\psi \in [y, \gamma y] \subset K_\gamma$, folgt:

$$\begin{aligned} d(\gamma y, \omega_3) &= d(\gamma x, \gamma y) - d(\gamma x, \omega_3) \\ &\leq d(\gamma x, \psi) - d(\gamma x, \omega_3) \leq d(\psi, \omega_3) \\ &\leq d(\psi, \omega_2) + d(\omega_2, \omega_3) \leq 8\delta. \end{aligned}$$



Da y eine Projektion von x auf K_γ ist und $\varphi_1 \in [y, \gamma y] \subset K_\gamma$, folgt:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, \varphi_1) \leq d(x, \varphi_3) + d(\varphi_3, \varphi_1) \\ &\leq d(x, \omega_1) + d(\varphi_3, \varphi_1) \\ &= d(x, \gamma x) - d(\gamma x, \omega_3) + d(\varphi_3, \varphi_1) \\ &= d(x, \gamma x) - d(\gamma x, \gamma y) + d(\gamma y, \omega_3) + d(\varphi_3, \varphi_1) \\ &\leq d(x, \gamma x) - d(x, y) + 12\delta. \end{aligned}$$

Somit ist $d(x, K_\gamma) = d(x, y) \leq \frac{1}{2} \cdot d(x, \gamma x) + 6\delta$. □

Satz 3.2. Seien $2 \leq q \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_q \in \Gamma$, $k > 12$ und $h := k + 24$. Setze $K_i := \{z \in X \mid d(z, \gamma_i z) \leq k\delta\}$ und $H_i := \{z \in X \mid d(z, \gamma_i z) \leq h\delta\}$ für alle $i = 1, \dots, q$. Es gelte $K_1 \cap \dots \cap K_q \neq \emptyset$. Dann folgt für alle $x \in X$:

$$d(x, H_1 \cap \dots \cap H_q) \leq d(x, \gamma_1 x) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(x, \gamma_i x) + 18\delta.$$

Beweis. Setze $l := k + 16$ und $L_i := \{z \in X \mid d(z, \gamma_i z) \leq l\delta\}$ für $i = 1, \dots, q$. Sei $x \in X$, und seien u_1, \dots, u_q Projektionen von x auf K_1, \dots, K_q . Gemäss Satz 3.1 gilt:

$$d(x, u_i) \leq \frac{1}{2} \cdot d(x, \gamma_i x) + 6\delta \quad \forall i = 1, \dots, q. \quad (9)$$

Seien v eine Projektion von x auf $K_1 \cap \dots \cap K_q$ und $c_1, \dots, c_q : [0, 1] \longrightarrow X$ kürzeste Geodäten von v nach u_1, \dots, u_q . Für alle $s \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, q$ gilt:

$$\begin{aligned} d(c_i(s), \gamma_i c_i(s)) &\leq \max\{d(v, \gamma_i v), d(u_i, \gamma_i u_i)\} + 8\delta \\ &\leq (k + 8)\delta \leq l\delta, \end{aligned} \quad (10)$$

da $v, u_i \in K_i$ sind. Speziell ist $c_i(s) \in L_i$ für alle $s \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, q$.

Für jedes $j \in \{2, \dots, q\}$ setze $p_j := \max\{s \in [0, 1] \mid c_1(s) \in L_j\}$. Wegen $c_1(0) = v \in (K_1 \cap \dots \cap K_q) \subset (L_1 \cap \dots \cap L_q)$ existiert p_j . Definiere weiter $p := \min\{p_j \mid j = 2, \dots, q\}$. Sei $j \in \{2, \dots, q\}$ beliebig. Wegen $p \in [0, p_j]$ gilt:

$$\begin{aligned} d(c_1(p), \gamma_j c_1(p)) &\leq \max\{d(v, \gamma_j v), d(c_1(p_j), \gamma_j c_1(p_j))\} + 8\delta \\ &\leq (l + 8)\delta = h\delta \end{aligned}$$

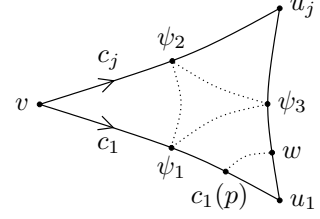
da $v, c_1(p_j) \in L_j$. Somit ist $c_1(p) \in H_2 \cap \dots \cap H_q$. Wegen (10) ist ausserdem $c_1(p) \in L_1 \subset H_1$, also $c_1(p) \in H_1 \cap \dots \cap H_q$. (11)

Es gibt $j \in \{2, \dots, q\}$ mit $p = p_j$. Nach Definition von p_j ist $c_1(p) \in L_j$ und $c_1(s) \notin L_j$ für alle $s > p$. Nehmen wir an, es sei $d(c_1(s), \text{Im}(c_j)) \leq 4\delta$ für ein $s > p$. Dann gibt es $\hat{s} \in [0, 1]$ mit $d(c_1(s), c_j(\hat{s})) \leq 4\delta$, also

$$\begin{aligned} d(c_1(s), \gamma_j c_1(s)) &\leq d(c_1(s), c_j(\hat{s})) + d(c_j(\hat{s}), \gamma_j c_j(\hat{s})) + d(\gamma_j c_j(\hat{s}), \gamma_j c_1(s)) \\ &\leq 2 \cdot 4\delta + (k + 8)\delta = l\delta \end{aligned}$$

nach (10). Somit ist $c_1(s) \in L_j$ und $s > p$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von j , also gilt $d(c_1(s), \text{Im}(c_j)) > 4\delta$ für alle $s > p$. (12)

Wir betrachten das Dreieck $\triangle := \triangle(v, u_1, u_j)$ mit den Seiten c_1, c_j und einer kürzesten Geodäten $[u_1, u_j]$. Seien ψ_1, ψ_2, ψ_3 die Tripel-Punkte von \triangle (siehe Abbildung rechts). Weiter sei $t \in [0, 1]$ so, dass $\psi_1 = c_1(t)$. Wegen (12) und weil \triangle 4δ -dünn ist, gilt $t \leq p$, also $c_1(p) \in [c_1(t), c_1(1)] = [\psi_1, u_1]$. Somit gibt es einen Punkt $w \in [u_1, \psi_3]$ so, dass $d(u_1, c_1(p)) = d(u_1, w) \leq d(u_1, u_j)$. Es folgt:



$$\begin{aligned} d(c_1(p), x) &\leq d(c_1(p), u_1) + d(u_1, x) \leq d(u_1, u_j) + d(u_1, x) \\ &\leq 2 \cdot d(u_1, x) + d(x, u_j) \leq d(x, \gamma_1 x) + \frac{1}{2} \cdot d(x, \gamma_j x) + 18\delta \end{aligned}$$

nach (9). Mit (11) folgt die Behauptung. \square

3.2 Projektion auf Achsen

Im Fall von hyperbolischen Isometrien brauchen wir nicht Projektionen auf Mengen mit kleiner Verschiebung, sondern Projektionen auf Achsen.

Satz 3.3. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $x \in X$ und $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ . Dann ist*

$$d(x, \text{Im}(e)) \leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(x, \gamma x) + \mathcal{R} + 6\delta.$$

Beweis. Setze $m := \lfloor \frac{12\delta}{\mathcal{E}} \rfloor + 1$. Nach Satz 2.7 ist $d(y, \gamma^m y) \geq \mathcal{E}m > 12\delta$ für alle $y \in X$, also auch $\min d_{\gamma^m} > 12\delta$. Somit ist $k := \frac{\min d_{\gamma^m}}{\delta} > 12$ und $K_{\gamma^m} := \{y \in X \mid d(y, \gamma^m y) \leq k\delta = \min d_{\gamma^m}\} \neq \emptyset$. Sei y eine Projektion von x auf K_{γ^m} . Nach Satz 3.1 und Definition von m ist

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \frac{1}{2} \cdot d(x, \gamma^m x) + 6\delta \leq \frac{m}{2} \cdot d(x, \gamma x) + 6\delta \\ &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(x, \gamma x) + 6\delta. \end{aligned}$$

Gemäss Definition von K_{γ^m} und $\min d_{\gamma^m}$ ist $d(y, \gamma^m y) = \min d_{\gamma^m}$. Somit gibt es eine Quasi-Achse $c_m : \mathbb{R} \rightarrow X$ von γ^m mit $c_m(0) = y$. Wegen $d_H(\text{Im}(e), \text{Im}(c_m)) \leq \mathcal{R}$ ist $d(y, \text{Im}(e)) \leq \mathcal{R}$, also

$$\begin{aligned}
d(x, \text{Im}(e)) &\leq d(x, y) + d(y, \text{Im}(e)) \\
&\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(x, \gamma x) + \mathcal{R} + 6\delta.
\end{aligned}
\quad \square$$

3.3 Häufungsargument

Lemma 3.4. Seien $k \geq 0$ und $q \in \mathbb{N}^*$. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_q \in \Gamma$, und es gelte $K := \{z \in X \mid d(z, \gamma_i z) \leq k\delta \ \forall i = 1, \dots, q\} \neq \emptyset$. Setze $r := 2D + \sqrt{q} \cdot k\delta$. Dann gibt es $B \in \mathbb{N}$ mit $B \leq (\Omega(r))^q$ und $K^1, \dots, K^B \subset K$, so dass gelten: $K = K^1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} K^B$, und für alle $j \in \{1, \dots, B\}$ sowie $v, w \in K^j$ gibt es ein $\tau \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ mit $d(v, \tau w) \leq 2D$.

Beweis. Sei $x \in X$ fest. Setze

$$\begin{aligned}
\Phi &:= \{\eta \in \Gamma \mid \exists y \in \overline{B}_D(x) \text{ mit } d(y, \eta y) \leq \sqrt{q} \cdot k\delta\}, \\
P &:= \Gamma x \cap \overline{B}_{2D+\sqrt{q} \cdot k\delta}(x) = \Gamma x \cap \overline{B}_r(x).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung an Ω gilt $\#P \leq \Omega(r)$. Ausserdem ist die Abbildung $\Phi \longrightarrow P, \eta \longmapsto \eta(x)$ injektiv. Somit ist $\#\Phi \leq \#P \leq \Omega(r)$. Setze nun

$$\begin{aligned}
\Sigma &:= \{\eta = (\eta_1, \dots, \eta_q) \in \Gamma^q \mid \exists y = (y_1, \dots, y_q) \in [\overline{B}_D(x)]^q \\
&\quad \text{mit } d(y, \eta y) \leq \sqrt{q} \cdot k\delta\},
\end{aligned}$$

wobei X^q das q -fache direkte Produkt von X (mit der Produktmetrik) sei. Offensichtlich ist $\Sigma \subset \Phi^q$ und somit $\#\Sigma \leq (\#\Phi)^q \leq (\Omega(r))^q$. Also gibt es $B \in \mathbb{N}$ mit $B \leq (\Omega(r))^q$ und $\eta_i^j \in \Gamma$ für $i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, B$, so dass $\#\Sigma = B$ und $\Sigma = \{\eta^j = (\eta_1^j, \dots, \eta_q^j) \mid j = 1, \dots, B\}$.

Setze

$$K^j := \{z \in K \mid \exists \sigma \in \Gamma \text{ mit } \sigma z \in \overline{B}_D(x) \text{ und } (\sigma \gamma_1 \sigma^{-1}, \dots, \sigma \gamma_q \sigma^{-1}) = \eta^j\}$$

für $j = 1, \dots, B$. Sei $z \in K$ beliebig. Es gibt $\sigma \in \Gamma$ mit $\sigma z \in \overline{B}_D(x)$. Dann ist $(\sigma z, \dots, \sigma z) \in [\overline{B}_D(x)]^q$ mit

$$\begin{aligned}
&d((\sigma z, \dots, \sigma z), (\sigma \gamma_1 \sigma^{-1}, \dots, \sigma \gamma_q \sigma^{-1})(\sigma z, \dots, \sigma z))^2 \\
&\quad = d((\sigma z, \dots, \sigma z), (\sigma \gamma_1 z, \dots, \sigma \gamma_q z))^2 \\
&\quad = d(z, \gamma_1 z)^2 + \dots + d(z, \gamma_q z)^2 \\
&\quad \leq q \cdot (k\delta)^2,
\end{aligned}$$

da $z \in K$. Somit ist $(\sigma\gamma_1\sigma^{-1}, \dots, \sigma\gamma_q\sigma^{-1}) \in \Sigma$, also gibt es $j \in \{1, \dots, B\}$ mit $(\sigma\gamma_1\sigma^{-1}, \dots, \sigma\gamma_q\sigma^{-1}) = \eta^j$. D. h. es ist $z \in K^j$. Da $z \in K$ beliebig war, folgt: $K = K^1 \cup \dots \cup K^B$.

Seien nun $j \in \{1, \dots, B\}$ und $v, w \in K^j$. Nach Definition von K^j gibt es $\sigma_v, \sigma_w \in \Gamma$ mit $\sigma_v v, \sigma_w w \in \overline{B}_D(x)$ und

$$(\sigma_v\gamma_1\sigma_v^{-1}, \dots, \sigma_v\gamma_q\sigma_v^{-1}) = \eta^j = (\sigma_w\gamma_1\sigma_w^{-1}, \dots, \sigma_w\gamma_q\sigma_w^{-1}).$$

D. h. $\sigma_v\gamma_i\sigma_v^{-1} = \sigma_w\gamma_i\sigma_w^{-1}$, also $\gamma_i\sigma_v^{-1}\sigma_w = \sigma_v^{-1}\sigma_w\gamma_i$ für alle $i = 1, \dots, q$. Setze $\tau := \sigma_v^{-1}\sigma_w$. Dann ist $\tau \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ und

$$d(v, \tau w) = d(\sigma_v v, \sigma_w w) \leq d(\sigma_v v, x) + d(x, \sigma_w w) \leq 2D.$$

Macht man die Mengen K^1, \dots, K^B disjunkt, folgt die Behauptung. \square

Satz 3.5. Seien $k \geq 0$, $q \in \mathbb{N}^*$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_q \in \Gamma$, es gelte $K := \{z \in X \mid d(z, \gamma_i z) \leq k\delta \ \forall i = 1, \dots, q\} \neq \emptyset$. Setze $r := 2D + \sqrt{q} \cdot (k + 8)\delta$. Dann gibt es für alle $x, y \in K$ ein $\sigma \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ mit

$$d(x, \sigma y) \leq 2(\Omega(r))^q \cdot (2D + \delta).$$

Beweis. Setze $L := \{z \in X \mid d(z, \gamma_i z) \leq (k + 8)\delta \ \forall i = 1, \dots, q\} \neq \emptyset$. Nach obigem Lemma (für $k + 8$ angewendet) gibt es $B \in \mathbb{N}$ mit $B \leq (\Omega(r))^q$ und $L^1, \dots, L^B \subset L$, so dass gelten: $L = L^1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} L^B$, und für alle $j \in \{1, \dots, B\}$ sowie $v, w \in L^j$ gibt es ein $\tau \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ mit $d(v, \tau w) \leq 2D$. (13)

Seien $x, y \in K$. Wir können OE $x \neq y$ annehmen. Sei $h : [0, d(x, y)] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von x nach y . Für $z \in \text{Im}(h)$ und $i \in \{1, \dots, q\}$ gilt:

$$d(z, \gamma_i z) \leq \max\{d(x, \gamma_i x), d(y, \gamma_i y)\} + 8\delta \leq (k + 8)\delta,$$

da $x, y \in K$. Somit ist $\text{Im}(h) \subset L$.

Setze nun

$$R := \left\lceil \frac{d(x, y)}{\delta} \right\rceil \quad \text{und} \quad Q := \frac{d(x, y)}{R} \leq \delta.$$

Für $s = 0, \dots, R$ setze $v_s := h(s \cdot Q) \in L$. Dann gelten $v_0 = x$, $v_R = y$ und $d(v_s, v_t) = |s - t| \cdot Q$ für alle $s, t = 0, \dots, R$. Wegen (13) gibt es für jedes $s \in \{0, \dots, R\}$ genau ein $j_s \in \{1, \dots, B\}$ mit $v_s \in L^{j_s}$.

Wähle induktiv eine „endliche Teilfolge“ $(v_{l_r})_{r=0, \dots, P}$ von $(v_s)_{s=0, \dots, R}$ folgendermassen:

- Setze $v_{l_0} := v_0$.
- Seien v_{l_0}, \dots, v_{l_r} bereits definiert. Es gibt genau ein $\xi \in \{0, \dots, R\}$ mit $v_{l_r} = v_\xi$. Ist $\xi = R$, setze $P := r$ und beende das Vorgehen. Die gesuchte Teilfolge ist in diesem Fall $v_{l_0} = v_0, v_{l_1}, \dots, v_{l_{r-1}}, v_{l_r} = v_{l_P} = v_R$.
Ist $\xi < R$, so gibt es genau ein $j \in \{1, \dots, B\}$ mit $v_{l_r} = v_\xi \in L^j$. Gibt es $t \in \{\xi+1, \dots, R\}$ mit $v_t \in L^j$, setze $\vartheta := \max\{t \in \{\xi+1, \dots, R\} \mid v_t \in L^j\}$ und $v_{l_{r+1}} := v_\vartheta$. Falls es kein $t \in \{\xi+1, \dots, R\}$ gibt mit $v_t \in L^j$, setze $v_{l_{r+1}} := v_{\xi+1}$.

Dieses Vorgehen liefert eine „endliche Teilfolge“ $(v_{l_r})_{r=0, \dots, P}$, so dass gilt:

- (a) $v_{l_0} = v_0 = x$ und $v_{l_P} = v_R = y$.
- (b) Für alle $j \in \{1, \dots, B\}$ ist $\#\{r \in \{0, \dots, P\} \mid v_{l_r} \in L^j\} \leq 2$.
- (c) Sei $r \in \{0, \dots, P-1\}$. Es gibt eindeutige $\xi_1, \xi_2 \in \{0, \dots, R\}$ mit $v_{l_r} = v_{\xi_1}$ und $v_{l_{r+1}} = v_{\xi_2}$. Falls es kein $j \in \{1, \dots, B\}$ gibt mit $v_{l_r}, v_{l_{r+1}} \in L^j$, so ist $\xi_2 = \xi_1 + 1$. Speziell ist dann $d(v_{l_r}, v_{l_{r+1}}) = d(v_{\xi_1}, v_{\xi_1+1}) = Q \leq \delta$.

Sei nun $r \in \{0, \dots, P-1\}$ beliebig. Es gibt genau ein $\xi \in \{0, \dots, R\}$ mit $v_{l_r} = v_\xi$ und genau ein $j \in \{1, \dots, B\}$ mit $v_{l_r} = v_\xi \in L^j$. Ist $v_{l_{r+1}} \notin L^j$, setze $\sigma_r := \text{id}$, dann gilt nach (c): $d(v_{l_r}, \sigma_r v_{l_{r+1}}) \leq \delta$. Ist $v_{l_{r+1}} \in L^j$, so gibt es nach (13) ein $\sigma_r \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ mit $d(v_{l_r}, \sigma_r v_{l_{r+1}}) \leq 2D$.

Somit existiert für jedes $r \in \{0, \dots, P-1\}$ ein $\sigma_r \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$, so dass $d(v_{l_r}, \sigma_r v_{l_{r+1}}) \leq 2D + \delta$. Setze $\sigma := \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{P-1} \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$. Dann folgt mit (13) und (a), (b):

$$\begin{aligned}
d(x, \sigma y) &= d(v_{l_0}, \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{P-1} v_{l_P}) \\
&\leq d(v_{l_0}, \sigma_0 v_{l_1}) + d(\sigma_0 v_{l_1}, \sigma_0 \sigma_1 v_{l_2}) + d(\sigma_0 \sigma_1 v_{l_2}, \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 v_{l_3}) \\
&\quad + \dots + d(\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{P-2} v_{l_{P-1}}, \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{P-1} v_{l_P}) \\
&= \sum_{r=0}^{P-1} d(v_{l_r}, \sigma_r v_{l_{r+1}}) \\
&\leq P \cdot (2D + \delta) \\
&\leq 2(\Omega(r))^q \cdot (2D + \delta). \quad \square
\end{aligned}$$

4 Beweis von Satz 0.2

Es sei daran erinnert, dass wir für das ganze Kapitel Folgendes voraussetzen: Seien $D, \delta > 0$, X ein eigentlicher, geodätischer, δ -hyperbolischer Raum und Γ eine Gruppe, welche frei, total diskontinuierlich, durch Isometrien und kompakt auf X operiert mit $\text{diam}(X/\Gamma) \leq D$. Weiter sei $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung mit $\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \Omega(r)$ für alle $r \geq 0$ und $y, z \in X$.

Mit den Vorbereitungen der letzten beiden Kapitel können wir nun Satz 0.2 beweisen. Zuerst sei er nochmals formuliert.

Satz 4.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ und $x, y \in X$. Dann gibt es ein $\sigma \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit*

$$d(x, \sigma y) \leq \mathcal{B}_1 \cdot \max_{i=1, \dots, n} d(x, \gamma_i x) + \mathcal{B}_1 \cdot \max_{i=1, \dots, n} d(y, \gamma_i y) + \mathcal{B}_2,$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(\Omega, D, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Der Beweis umfasst das ganze Kapitel 4. Wir untersuchen die verschiedenen Fälle, die auftreten können, wobei wir unterscheiden, ob die Isometrien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ elliptisch oder hyperbolisch sind und wie sie sich gegenseitig verhalten. Das wichtigste Hilfsmittel sind Achsen von hyperbolischen Isometrien, falls solche auftreten. Sind alle Isometrien elliptisch, müssen andere Argumente angewandt werden. Diesen Fall behandeln wir zuerst. Danach schränken wir die Anzahl möglicher Fälle mit hyperbolischen Isometrien ein, indem wir das Verhalten von Fixpunkten auf dem Rand untersuchen, und wenden uns dann diesen Fällen zu.

4.1 Nur elliptische Isometrien

Nach Lemma 1.42 ist $\min d_\alpha \leq 6\delta$ für jede elliptische Isometrie $\alpha \in \Gamma$. Dies wird im Folgenden implizit gebraucht. Wir behandeln zuerst den Fall mit nur einer elliptischen Isometrie.

Satz 4.2. *Seien $\alpha \in \Gamma$ elliptisch und $x, y \in X$. Dann gibt es $\sigma \in Z(\alpha)$ mit*

$$d(x, \sigma y) \leq \frac{1}{2} \cdot d(x, \alpha x) + \frac{1}{2} \cdot d(y, \alpha y) + \mathcal{B}_3,$$

wobei $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_3(\Omega, D, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Setze $r := 2D + 21\delta$ und $\mathcal{B}_3 := 2\Omega(r) \cdot (2D + \delta) + 12\delta$.

Es ist $K_\alpha := \{z \in X \mid d(z, \alpha z) \leq 13\delta\} \neq \emptyset$. Seien p bzw. q Projektionen von x bzw. y auf K_α . Nach Satz 3.1 mit $k = 13$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x, p) &\leq \frac{1}{2} \cdot d(x, \alpha x) + 6\delta, \\ d(y, q) &\leq \frac{1}{2} \cdot d(y, \alpha y) + 6\delta. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.5 gibt es ausserdem $\sigma \in Z(\alpha)$ mit

$$d(p, \sigma q) \leq 2\Omega(r) \cdot (2D + \delta).$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. \square

Auch für mehrere elliptische Isometrien möchte ich Satz 3.5 anwenden. Die Abschätzung von Satz 3.5 hängt aber von der Anzahl Isometrien ab, und es braucht ein zusätzliches Argument, um diese Anzahl zu beschränken.

Lemma 4.3. *Seien $2 \leq q \in \mathbb{N}$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_q \in \Gamma$ sowie $k > 12$. Für alle $i = 1, \dots, q$ gelte $K_i := \{z \in X \mid d(z, \gamma_i z) \leq k\delta\} \neq \emptyset$. Es gebe $x, y \in X$ mit*

$$\begin{aligned} d(x, y) &> d(x, \gamma_1 x) + d(y, \gamma_1 y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(x, \gamma_i x) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(y, \gamma_i y) + 52\delta. \end{aligned}$$

Dann gibt es $z \in X$ mit $d(z, \gamma_i z) \leq (k + 24)\delta$ für alle $i = 1, \dots, q$.

Beweis. Seien p_i bzw. r_i Projektionen von x bzw. y auf K_i , $i = 1, \dots, q$. Nach Satz 3.1 gilt für $i = 1, \dots, q$:

$$\begin{aligned} d(x, p_i) &\leq \frac{1}{2} \cdot d(x, \gamma_i x) + 6\delta, \\ d(y, r_i) &\leq \frac{1}{2} \cdot d(y, \gamma_i y) + 6\delta. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Voraussetzung folgt:

$$\begin{aligned} d(p_1, r_1) &\geq d(x, y) - d(x, p_1) - d(y, r_1) \\ &> d(x, \gamma_1 x) - d(x, p_1) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(x, \gamma_i x) \\ &\quad + d(y, \gamma_1 y) - d(y, r_1) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(y, \gamma_i y) + 52\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq d(x, p_1) + \max_{i=2, \dots, q} d(x, p_i) + d(y, r_1) + \max_{i=2, \dots, q} d(y, r_i) + 16\delta \\
&\geq \max_{i=2, \dots, q} d(p_1, p_i) + \max_{i=2, \dots, q} d(r_1, r_i) + 16\delta.
\end{aligned}$$

Sei $[p_1, r_1]$ eine kürzeste Geodäte. Dann gibt es also $z \in [p_1, r_1]$ mit

$$\begin{aligned}
d(z, p_1) &> \max_{i=2, \dots, q} d(p_1, p_i) + 8\delta, \\
d(z, r_1) &> \max_{i=2, \dots, q} d(r_1, r_i) + 8\delta.
\end{aligned} \tag{14}$$

Sei $j \in \{2, \dots, q\}$. Seien $[p_1, p_j]$, $[p_j, r_j]$, $[r_1, r_j]$ kürzeste Geodäten. Es gibt $w_j \in [p_1, p_j] \cup [p_j, r_j] \cup [r_j, r_1]$ mit $d(z, w_j) \leq 8\delta$. Wegen (14) muss $w_j \in [p_j, r_j]$ sein. Nach Lemma 1.9 gilt:

$$d(w_j, \gamma_j w_j) \leq \max\{d(p_j, \gamma_j p_j), d(r_j, \gamma_j r_j)\} + 8\delta \leq (k+8)\delta,$$

da $p_j, r_j \in K_j$. Also ist

$$d(z, \gamma_j z) \leq d(z, w_j) + d(w_j, \gamma_j w_j) + d(\gamma_j w_j, \gamma_j z) \leq (k+24)\delta.$$

Dies gilt für alle $j = 2, \dots, q$. Ausserdem gilt nach Lemma 1.9 auch:

$$d(z, \gamma_1 z) \leq \max\{d(p_1, \gamma_1 p_1), d(r_1, \gamma_1 r_1)\} + 8\delta \leq (k+8)\delta,$$

da $p_1, r_1 \in K_1$. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Beschränken wir uns auf elliptische Isometrien, folgt mit der Definition von Ω :

Korollar 4.4. *Seien $2 \leq q \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \Gamma$ elliptisch und $k > 12$. Es gebe $x, y \in X$ mit*

$$\begin{aligned}
d(x, y) &> d(x, \alpha_1 x) + d(y, \alpha_1 y) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(x, \alpha_i x) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(y, \alpha_i y) + 52\delta.
\end{aligned}$$

Dann ist $\{z \in X \mid d(z, \alpha_i z) \leq (k+24)\delta \ \forall i = 1, \dots, q\} \neq \emptyset$, und setzt man $r := (k+24)\delta$, so gilt $\#\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\} \leq \Omega(r)$.

Satz 4.5. Seien $2 \leq q \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \Gamma$ elliptisch und $x, y \in X$. Dann gibt es $\sigma \in Z(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ mit

$$d(x, \sigma y) \leq \frac{3}{2} \cdot \max_{i=1, \dots, q} d(x, \alpha_i x) + \frac{3}{2} \cdot \max_{i=1, \dots, q} d(y, \alpha_i y) + \mathcal{B}_4,$$

wobei $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_4(\Omega, D, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Setze $r_1 := 37\delta$, $r_2 := 2D + \sqrt{\Omega(r_1)} \cdot 69\delta$ und schliesslich

$$\mathcal{B}_4 := 2 \cdot (\Omega(r_2))^{\Omega(r_1)} \cdot (2D + \delta) + 52\delta.$$

Wir können OE annehmen, es gelte

$$\begin{aligned} d(x, y) &> d(x, \alpha_1 x) + d(y, \alpha_1 y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(x, \alpha_i x) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(y, \alpha_i y) + 52\delta. \end{aligned}$$

Setze $K := \{z \in X \mid d(z, \alpha_i z) \leq 37\delta \ \forall i = 1, \dots, q\}$. Nach obigem Korollar mit $k = 13$ ist $K \neq \emptyset$, und es gilt $\#\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\} \leq \Omega(r_1)$. Somit gibt es ein $R \in \mathbb{N}$ mit $R \leq \Omega(r_1)$ und $\#\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\} = R$. Seien OE $R \geq 2$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_R$ verschieden, d. h. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_R\}$.

Setze $h := 61$ und $H := \{z \in X \mid d(z, \alpha_i z) \leq h\delta \ \forall i = 1, \dots, q\} \neq \emptyset$. Seien v bzw. w Projektionen von x bzw. y auf H . Aus Satz 3.2 mit $k = 37$ folgt:

$$\begin{aligned} d(x, v) &\leq d(x, \alpha_1 x) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(x, \alpha_i x) + 18\delta, \\ d(y, w) &\leq d(y, \alpha_1 y) + \frac{1}{2} \cdot \max_{i=2, \dots, q} d(y, \alpha_i y) + 18\delta. \end{aligned}$$

Setze nun $\tilde{r} := 2D + \sqrt{R} \cdot 69\delta$. Nach Satz 3.5 mit $k = 61$ gilt: Es gibt ein $\sigma \in Z(\alpha_1, \dots, \alpha_R) = Z(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ mit

$$d(v, \sigma w) \leq 2(\Omega(\tilde{r}))^R \cdot (2D + \delta).$$

Aus der Definition von Ω und $R \leq \Omega(r_1)$ ist klar, dass $\Omega(\tilde{r}) \leq \Omega(r_2)$ gilt. Somit ist

$$d(v, \sigma w) \leq 2(\Omega(r_2))^{\Omega(r_1)} \cdot (2D + \delta).$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. \square

4.2 Fixpunkte von hyperbolischen Isometrien auf dem Rand

Satz 4.6. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ hyperbolisch. Dann ist $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} \cap \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\} = \emptyset$ oder $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} = \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}$.*

Beweis. Sei $\xi \in \{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} \cap \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}$. Wähle $\tilde{\gamma}_1 \in \{\gamma_1, \gamma_1^{-1}\}$, $\tilde{\gamma}_2 \in \{\gamma_2, \gamma_2^{-1}\}$ so, dass $\tilde{\gamma}_1^+ = \xi = \tilde{\gamma}_2^+$. Seien $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$ Quasi-Achsen von $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ und $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ kürzeste Geodäten mit $\tilde{g}_i(0) = \tilde{c}_i(0)$, $\tilde{g}_i(\infty) = \tilde{c}_i(\infty) = \xi$ für $i = 1, 2$. Wegen Satz 1.23 ist $d_H(\text{Im}(\tilde{g}_1), \text{Im}(\tilde{g}_2)) < \infty$, mit Korollar 2.11 folgt

$$L := d_H(\text{Im}(\tilde{c}_1|_{\mathbb{R}_+}), \text{Im}(\tilde{c}_2|_{\mathbb{R}_+})) < \infty.$$

Setze $r := 2L + \min d_{\tilde{\gamma}_2} < \infty$, sei $x := \tilde{c}_1(0)$. Es gibt $y \in \text{Im}(\tilde{c}_2|_{\mathbb{R}_+})$ mit $d(x, y) \leq L$. Sei $v \in \mathbb{R}_+$ so, dass $y = \tilde{c}_2(v)$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt $z \in \text{Im}(\tilde{c}_2|_{\mathbb{R}_+})$ mit $d(\tilde{\gamma}_1^n x, z) = d(\tilde{c}_1(n \cdot \min d_{\tilde{\gamma}_1}), z) \leq L$. Sei $t \in \mathbb{R}_+$ so, dass $z = \tilde{c}_2(t)$. Es gibt $m \in \mathbb{Z}$ mit $|t - (m \cdot \min d_{\tilde{\gamma}_2} + v)| \leq \min d_{\tilde{\gamma}_2}$. Also ist

$$\begin{aligned} d(\tilde{\gamma}_1^{-n} \tilde{\gamma}_2^m x, x) &= d(\tilde{\gamma}_2^m x, \tilde{\gamma}_1^n x) \\ &\leq d(\tilde{\gamma}_2^m x, \tilde{\gamma}_2^m y) + d(\tilde{c}_2(m \cdot \min d_{\tilde{\gamma}_2} + v), \tilde{c}_2(t)) + d(z, \tilde{\gamma}_1^n x) \\ &\leq 2L + \min d_{\tilde{\gamma}_2} = r. \end{aligned}$$

Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{\gamma}_1^{-n} \tilde{\gamma}_2^{m_n} x \in \overline{B}_r(x)$. Nach Definition von Ω ist $\#\{\tilde{\gamma}_1^{-n} \tilde{\gamma}_2^{m_n} x \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \Omega(r)$. Also gibt es $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{\gamma}_1^{-n_1} \tilde{\gamma}_2^{m_1} x = \tilde{\gamma}_1^{-n_2} \tilde{\gamma}_2^{m_2} x$. Da Γ frei auf X operiert, folgt $\tilde{\gamma}_1^{-n_1} \tilde{\gamma}_2^{m_1} = \tilde{\gamma}_1^{-n_2} \tilde{\gamma}_2^{m_2}$.

Sei OE $n_1 > n_2$. Setze $n := n_1 - n_2 > 0$ und $m := m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\tilde{\gamma}_1^n = \tilde{\gamma}_2^m$. Da $n > 0$ und γ hyperbolisch ist, muss $m \neq 0$ sein. Damit folgt:

$$\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} = \{(\tilde{\gamma}_1^n)^+, (\tilde{\gamma}_1^n)^-\} = \{(\tilde{\gamma}_2^m)^+, (\tilde{\gamma}_2^m)^-\} = \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}. \quad \square$$

Die Fixpunkte von zwei hyperbolischen Isometrien auf dem Rand sind also als Mengen gleich oder disjunkt. Als nächstes wollen wir untersuchen, wie sich die Fixpunkte einer hyperbolischen Isometrie auf dem Rand unter einer elliptischen Isometrie verhalten. Dazu brauchen wir das folgende Lemma, welches später mehrfach verwendet wird.

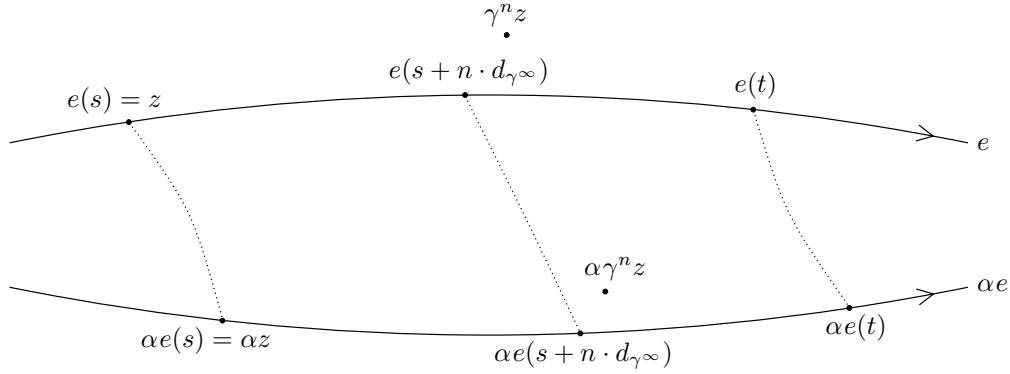


Abbildung 4: Zum Beweis von Lemma 4.7

Lemma 4.7. Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch und $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ . Seien $L \geq 0$, $r := 2L + 2\mathcal{S} + 8\delta$ und $s \leq t \in \mathbb{R}$ mit $(t - s) \geq \Omega(r) \cdot d_{\gamma^\infty}$.

- (a) Gilt $d(e(s), \alpha e(s)) \leq L$ und $d(e(t), \alpha e(t)) \leq L$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n \leq \Omega(r)$ und $\gamma^n \alpha = \alpha \gamma^n$.
- (b) Gilt $d(e(s), \alpha e(s)) \leq L$ und $d(e(t), \alpha e(2s - t)) \leq L$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n \leq \Omega(r)$ und $\gamma^{-n} \alpha = \alpha \gamma^n$.

Beweis. Wir zeigen (a), (b) wird analog bewiesen. Setze $z := e(s)$, sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq \Omega(r)$. Nach Voraussetzung ist $s \leq s + n \cdot d_{\gamma^\infty} \leq s + \Omega(r) \cdot d_{\gamma^\infty} \leq t$. Also gilt (Abbildung 4):

$$\begin{aligned} d(e(s + n \cdot d_{\gamma^\infty}), \alpha e(s + n \cdot d_{\gamma^\infty})) \\ \leq \max\{d(e(s), \alpha e(s)), d(e(t), \alpha e(t))\} + 8\delta \leq L + 8\delta. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.18 folgt:

$$\begin{aligned} d(\gamma^n e(s), \alpha \gamma^n e(s)) &\leq d(e(s + n \cdot d_{\gamma^\infty}), \alpha e(s + n \cdot d_{\gamma^\infty})) + 2\mathcal{S} \\ &\leq 2\mathcal{S} + L + 8\delta, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} d(z, \alpha^{-1} \gamma^{-n} \alpha \gamma^n z) &= d(\gamma^n \alpha z, \alpha \gamma^n z) \\ &\leq d(\gamma^n \alpha e(s), \gamma^n e(s)) + d(\gamma^n e(s), \alpha \gamma^n e(s)) \\ &\leq 2L + 2\mathcal{S} + 8\delta = r. \end{aligned}$$

Somit ist $\alpha^{-1}\gamma^{-n}\alpha\gamma^n z \in \overline{B}_r(z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq n \leq \Omega(r)$. Nach Definition von Ω ist $\#\{\alpha^{-1}\gamma^{-n}\alpha\gamma^n z \mid 0 \leq n \leq \Omega(r)\} \leq \Omega(r)$. Also gibt es $n \neq m \in \{0, \dots, \Omega(r)\}$ mit $\alpha^{-1}\gamma^{-n}\alpha\gamma^n z = \alpha^{-1}\gamma^{-m}\alpha\gamma^m z$. Da Γ frei auf X operiert, folgt $\alpha^{-1}\gamma^{-n}\alpha\gamma^n = \alpha^{-1}\gamma^{-m}\alpha\gamma^m$.

Sei OE $n > m$. Setze $p := n - m$. Dann ist $0 < p \leq \Omega(r)$ und $\alpha\gamma^p = \gamma^p\alpha$. \square

Satz 4.8. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch und $\alpha \in \Gamma$ elliptisch. Dann ist entweder $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} \cap \{\gamma^+, \gamma^-\} = \emptyset$ oder $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} = \{\gamma^+, \gamma^-\}$.*

Beweis. Sei $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} \cap \{\gamma^+, \gamma^-\} \neq \emptyset$. Wir zeigen den Fall $\alpha(\gamma^+) = \gamma^+$. Sei $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ . e ist eine kürzeste Geodäte von γ^- nach γ^+ , $\alpha e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $\alpha(\gamma^-)$ nach $\alpha(\gamma^+) = \gamma^+$. Mit Satz 1.23 folgt:

$$L := \sup_{v \geq 0} d(e(v), \alpha e(v)) < \infty.$$

Setze $r := 2L + 2\mathcal{S} + 8\delta$, $s := 0$ und $t := \Omega(r) \cdot d_{\gamma^\infty}$. Nach Lemma 4.7(a) gibt es $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\gamma^n \alpha = \alpha \gamma^n$, also $\gamma^{in} \alpha = \alpha \gamma^{in}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Mit Satz 2.18 folgt für alle $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} d(e(-in \cdot d_{\gamma^\infty}), \alpha e(-in \cdot d_{\gamma^\infty})) &\leq d(\gamma^{-in} e(0), \alpha \gamma^{-in} e(0)) + 2\mathcal{S} \\ &= d(\gamma^{-in} e(0), \gamma^{-in} \alpha e(0)) + 2\mathcal{S} \\ &\leq L + 2\mathcal{S}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$d_H(\text{Im}(e|_{(-\infty, 0]}), \text{Im}(\alpha e|_{(-\infty, 0]})) \leq L + 2\mathcal{S} + n \cdot d_{\gamma^\infty} < \infty.$$

Mit Satz 1.23 erhält man: $\gamma^- = e(-\infty) = \alpha e(-\infty) = \alpha(\gamma^-)$. Somit gilt $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} = \{\gamma^+, \gamma^-\}$.

Gilt $\alpha(\gamma^-) = \gamma^+$, beweist man $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} = \{\gamma^+, \gamma^-\}$ analog, wobei man Lemma 4.7(b) anstelle von Lemma 4.7(a) verwendet. Für die beiden Fälle $\alpha(\gamma^-) = \gamma^-$ und $\alpha(\gamma^+) = \gamma^-$ betrachte man γ^{-1} anstelle von γ . \square

Nun widmen wir uns dem Rest des Beweises von Satz 4.1. Der Fall, dass alle Isometrien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ elliptisch sind, wurde schon in Abschnitt 4.1 behandelt. Somit können wir annehmen, dass von den Isometrien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ mindestens

eine hyperbolisch ist. In Abschnitt 4.3 untersuchen wir den Fall, dass mindestens zwei hyperbolische Isometrien γ_i, γ_j mit $\{\gamma_i^+, \gamma_i^-\} \cap \{\gamma_j^+, \gamma_j^-\} = \emptyset$ auftreten. In den Abschnitten 4.4 und 4.5 betrachten wir die Situation, dass mindestens eine hyperbolische Isometrie γ_i und eine elliptische Isometrie γ_j auftreten, so dass γ_j die Fixpunkte von γ_i auf dem Rand vertauscht oder auf eine disjunkte Menge abbildet. In all diesen Fällen haben die übrigen Isometrien keinen Einfluss.

Danach können wir gemäss Satz 4.6 annehmen, dass alle auftretenden hyperbolischen Isometrien dieselben Fixpunkte auf dem Rand haben, und gemäss Satz 4.8, dass diese durch alle auftretenden elliptischen Isometrien punktweise fest gelassen werden. Dieser Fall wird schliesslich in Abschnitt 4.6 untersucht.

4.3 γ_1, γ_2 hyperbolisch mit $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} \cap \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\} = \emptyset$

Satz 4.9. Seien $k > 0$ und $r := 4\mathcal{S} + (50k + 24)\delta$. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ hyperbolisch mit $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} \cap \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\} = \emptyset$, $e_1, e_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$ Achsen von γ_1, γ_2 und $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2 \in \mathbb{R}$ mit $d(e_1(a_1), e_2(a_2)) \leq 5k\delta$, $d(e_1(b_1), e_2(b_2)) \leq 5k\delta$. Dann folgt:

$$(b_1 - a_1), (b_2 - a_2) \leq (\Omega(r) + 1) \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\}.$$

Beweis. Nehmen wir an, die Behauptung des Satzes gelte nicht, d. h. OE sei

$$(b_1 - a_1) > (\Omega(r) + 1) \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\} > 0.$$

Wenden wir Lemma 1.9 auf $e_1|_{[a_1, b_1]}$ und $e_2|_{[a_2, b_2]}$ an, folgt für alle $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} d(e_1((b_1 - a_1)t + a_1), e_2((b_2 - a_2)t + a_2)) \\ \leq \max\{d(e_1(a_1), e_2(a_2)), d(e_1(b_1), e_2(b_2))\} + 8\delta \\ \leq (5k + 8)\delta. \end{aligned}$$

Sei nun $s \in [0, b_1 - a_1]$ beliebig. Dann ist $\frac{s}{b_1 - a_1} \in [0, 1]$, also

$$\begin{aligned} d(e_1(s + a_1), e_2(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot s + a_2)) \\ = d(e_1((b_1 - a_1) \cdot \frac{s}{b_1 - a_1} + a_1), e_2((b_2 - a_2) \cdot \frac{s}{b_1 - a_1} + a_2)) \\ \leq (5k + 8)\delta. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\left| s - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot s \right| = \frac{s}{b_1 - a_1} \cdot |(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)| \\
&= |d(e_1(b_1), e_1(a_1)) - d(e_2(b_2), e_2(a_2))| \\
&\leq d(e_1(b_1), e_2(b_2)) + d(e_1(a_1), e_2(a_2)) \\
&\leq 10k\delta.
\end{aligned}$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned}
d(e_1(a_1 + s), e_2(a_2 + s)) &\leq d(e_1(a_1 + s), e_2(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot s + a_2)) \\
&\quad + d(e_2(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot s + a_2), e_2(a_2 + s)) \\
&\leq (15k + 8)\delta.
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $s \in [0, b_1 - a_1]$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq \Omega(r)$. Nach Annahme und Lemma 1.41(a) sind $n \cdot d_{\gamma_1^\infty}$, $n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty}$, $d_{\gamma_2^\infty} \in [0, b_1 - a_1]$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
d(e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty}), e_2(a_2 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty})) &\leq (15k + 8)\delta, \\
d(e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty}), e_2(a_2 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) &\leq (15k + 8)\delta, \\
d(e_1(a_1 + d_{\gamma_2^\infty}), e_2(a_2 + d_{\gamma_2^\infty})) &\leq (15k + 8)\delta.
\end{aligned}$$

Setze $p := e_1(a_1)$. Dann folgt zusammen mit Satz 2.18:

$$\begin{aligned}
&d(\gamma_2 \gamma_1^n p, e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\leq d(\gamma_2 \gamma_1^n e_1(a_1), \gamma_2 e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty})) \\
&\quad + d(\gamma_2 e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty}), \gamma_2 e_2(a_2 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty})) \\
&\quad + d(\gamma_2 e_2(a_2 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty}), e_2(a_2 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\quad + d(e_2(a_2 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty}), e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\leq 2\mathcal{S} + (30k + 16)\delta
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&d(\gamma_1^n \gamma_2 p, e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\leq d(\gamma_1^n \gamma_2 e_1(a_1), \gamma_1^n \gamma_2 e_2(a_2)) \\
&\quad + d(\gamma_1^n \gamma_2 e_2(a_2), \gamma_1^n e_2(a_2 + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\quad + d(\gamma_1^n e_2(a_2 + d_{\gamma_2^\infty}), \gamma_1^n e_1(a_1 + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\quad + d(\gamma_1^n e_1(a_1 + d_{\gamma_2^\infty}), e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\leq 2\mathcal{S} + (20k + 8)\delta.
\end{aligned}$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}
d(\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-n}\gamma_2\gamma_1^n p, p) &= d(\gamma_2\gamma_1^n p, \gamma_1^n\gamma_2 p) \\
&\leq d(\gamma_2\gamma_1^n p, e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\
&\quad + d(e_1(a_1 + n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty}), \gamma_1^n\gamma_2 p) \\
&\leq 4\mathcal{S} + (50k + 24)\delta = r.
\end{aligned}$$

Somit ist $\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-n}\gamma_2\gamma_1^n p \in \overline{B}_r(p)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq \Omega(r)$. Nach Voraussetzung an Ω ist $\#\{\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-n}\gamma_2\gamma_1^n p \mid 0 \leq n \leq \Omega(r)\} \leq \Omega(r)$. Also gibt es $n \neq m \in \{0, \dots, \Omega(r)\}$ mit $\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-n}\gamma_2\gamma_1^n p = \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-m}\gamma_2\gamma_1^m p$. Da Γ frei auf X operiert, folgt $\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-n}\gamma_2\gamma_1^n = \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-m}\gamma_2\gamma_1^m$.

Sei OE $m > n$. Setze $p := m - n$. Dann ist $p > 0$ und $\gamma_1^p\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1^p$. Mit Lemma 1.47 folgt: $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} = \{(\gamma_1^p)^+, (\gamma_1^p)^-\} = \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}$, und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Korollar 4.10. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ hyperbolisch mit $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} \cap \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\} = \emptyset$ und $e_1, e_2 : \mathbb{R} \longrightarrow X$ Achsen von γ_1, γ_2 . Dann gilt für alle $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
d(e_1(v_1), e_1(w_1)) &\leq 2 \cdot d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + 2 \cdot d(e_1(w_1), e_2(w_2)) \\
&\quad + \mathcal{B}_5 \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\} + 108\delta, \\
d(e_2(v_2), e_2(w_2)) &\leq 2 \cdot d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + 2 \cdot d(e_1(w_1), e_2(w_2)) \\
&\quad + \mathcal{B}_5 \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\} + 108\delta,
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{B}_5 = \mathcal{B}_5(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Setze $r := 4\mathcal{S} + 474\delta = 4\mathcal{S} + (50 \cdot 9 + 24)\delta$ und $\mathcal{B}_5 := \Omega(r) + 1$.

Seien $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathbb{R}$. Gilt $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) > 9\delta$, folgt die Behauptung aus Lemma 1.57 mit $k = 9$. Gelte also $\min_{s,t \in \mathbb{R}} d(e_1(s), e_2(t)) \leq 9\delta$. Seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ die Zahlen aus Lemma 1.52 mit $k = 9$. Gemäss Lemma 1.53 können folgende Fälle auftreten:

- (a) $b_1 - a_1 \leq 90\delta$ und $b_2 - a_2 \leq 90\delta$.
- (b) $d(e_1(a_1), e_2(a_2)) \leq 45\delta$ und $d(e_1(b_1), e_2(b_2)) \leq 45\delta$. Aus obigem Satz folgt:

$$(b_1 - a_1), (b_2 - a_2) \leq (\Omega(r) + 1) \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\}.$$

- (c) $d(e_1(a_1), e_2(b_2)) \leq 45\delta$ und $d(e_1(b_1), e_2(a_2)) \leq 45\delta$. Setze $\tilde{\gamma}_1 := \gamma_1^{-1}$ und $\tilde{e}_1 : \mathbb{R} \rightarrow X$, $\tilde{e}_1(t) := e_1(-t)$. Dann folgt aus obigem Satz, angewendet auf $\tilde{\gamma}_1, \gamma_2$ und \tilde{e}_1, e_2 :

$$(b_1 - a_1), (b_2 - a_2) \leq (\Omega(r) + 1) \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\}.$$

In jedem Fall ist also

$$\begin{aligned} (b_1 - a_1), (b_2 - a_2) &\leq (\Omega(r) + 1) \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\} + 90\delta \\ &= \mathcal{B}_5 \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\} + 90\delta. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.56. \square

Satz 4.11. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ hyperbolisch mit $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} \cap \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\} = \emptyset$. Dann gilt für alle $x, y \in X$:*

$$d(x, y) \leq \mathcal{B}_6 \cdot [d(x, \gamma_1 x) + d(x, \gamma_2 x) + d(y, \gamma_1 y) + d(y, \gamma_2 y)] + \mathcal{B}_7,$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Sei \mathcal{B}_5 die Konstante aus obigem Korollar. Setze

$$\mathcal{B}_6 := 3 \cdot \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{B}_5, \quad \mathcal{B}_7 := 10\mathcal{R} + 168\delta.$$

Seien $x, y \in X$ und $e_1, e_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$ Achsen von γ_1, γ_2 . Seien $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $e_1(v_1)$ bzw. $e_1(w_1)$ Projektionen von x bzw. y auf $\text{Im}(e_1)$ und $e_2(v_2)$ bzw. $e_2(w_2)$ Projektionen von x bzw. y auf $\text{Im}(e_2)$ sind. Nach Satz 3.3 gilt:

$$\begin{aligned} d(x, e_1(v_1)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(x, \gamma_1 x) + \mathcal{R} + 6\delta, \\ d(x, e_2(v_2)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(x, \gamma_2 x) + \mathcal{R} + 6\delta, \\ d(y, e_1(w_1)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(y, \gamma_1 y) + \mathcal{R} + 6\delta, \\ d(y, e_2(w_2)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(y, \gamma_2 y) + \mathcal{R} + 6\delta. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} d(e_1(v_1), e_2(v_2)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot [d(x, \gamma_1 x) + d(x, \gamma_2 x)] + 2\mathcal{R} + 12\delta, \\ d(e_1(w_1), e_2(w_2)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot [d(y, \gamma_1 y) + d(y, \gamma_2 y)] + 2\mathcal{R} + 12\delta. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt gemäss obigem Korollar:

$$\begin{aligned} d(e_1(v_1), e_1(w_1)) &\leq 2 \cdot d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + 2 \cdot d(e_1(w_1), e_2(w_2)) \\ &\quad + \mathcal{B}_5 \cdot \max\{\min d_{\gamma_1}, \min d_{\gamma_2}\} + 108\delta \\ &\leq 2 \cdot d(e_1(v_1), e_2(v_2)) + 2 \cdot d(e_1(w_1), e_2(w_2)) \\ &\quad + \mathcal{B}_5 \cdot [d(x, \gamma_1 x) + d(x, \gamma_2 x)] + 108\delta. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. \square

4.4 γ hyperbolisch, α elliptisch mit $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} \cap \{\gamma^+, \gamma^-\} = \emptyset$

Mit grösserem Aufwand (mehr Fallunterscheidungen) kann man bei den folgenden Aussagen bessere Konstanten erhalten.

Lemma 4.12. *Seien $\xi^+ \neq \xi^- \in \partial_\infty X$, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\{\alpha(\xi^+), \alpha(\xi^-)\} \cap \{\xi^+, \xi^-\} = \emptyset$. Seien $k > 8$, $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von ξ^- nach ξ^+ , und gelte $\min_{v,w \in \mathbb{R}} d(e(v), \alpha e(w)) \leq k\delta$. Seien a_1, b_1, a_2, b_2 die Zahlen aus Lemma 1.52 mit $e_1 := e$, $e_2 := \alpha e$, es sei $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$. Weiter gelte eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (a) $d(e(a_1), \alpha e(a_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e(b_1), \alpha e(b_2)) \leq 5k\delta$,
- (b) $d(e(a_1), \alpha e(b_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e(b_1), \alpha e(a_2)) \leq 5k\delta$.

Dann gibt es $u \in [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ mit $d(e(u), \alpha e(u)) \leq (32k + 90)\delta$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es $t \in [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$. Nach Lemma 1.9 gilt:

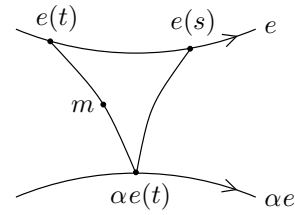
$$d_H(\text{Im}(e|_{[a_1, b_1]}), \text{Im}(\alpha e|_{[a_2, b_2]})) \leq (5k + 8)\delta,$$

also gibt es $s \in [a_1, b_1]$ mit $d(\alpha e(t), e(s)) \leq (5k + 8)\delta$.

Sei m der Mittelpunkt einer kürzesten Geodäten $[e(t), \alpha e(t)]$. Nach Lemma 1.42 ist $d(m, \alpha m) \leq 6\delta$.

Da das Dreieck $\triangle(e(s), e(t), \alpha e(t))$ 4δ -dünn ist, gibt es $p \in [e(s), e(t)] \cup [e(s), \alpha e(t)]$ mit $d(m, p) \leq 4\delta$. Es folgt:

$$d(p, \alpha p) \leq d(p, m) + d(m, \alpha m) + d(\alpha m, \alpha p) \leq 2 \cdot 4\delta + 6\delta = 14\delta.$$



Ist $p \in [e(s), e(t)]$, setze $z := p$. Ist $p \in [e(s), \alpha e(t)]$, setze $z := e(s)$. Dann ist $z = e(v)$ für ein $v \in [a_1, b_1]$ mit

$$d(e(v), \alpha e(v)) = d(z, \alpha z) \leq \max\{14\delta, (10k + 30)\delta\} = (10k + 30)\delta.$$

Ist $v \in [a_2, b_2]$, folgt die Behauptung mit $u := v$.

Ist $v > b_2$, gilt nach Lemma 1.55: $d(\alpha e(v), \text{Im}(e)) \geq (v - b_2) - k\delta$, also

$$v - b_2 \leq d(\alpha e(v), \text{Im}(e)) + k\delta \leq d(\alpha e(v), e(v)) + k\delta \leq (11k + 30)\delta.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} d(e(b_2), \alpha e(b_2)) &\leq d(e(b_2), e(v)) + d(e(v), \alpha e(v)) + d(\alpha e(v), \alpha e(b_2)) \\ &\leq 2 \cdot (11k + 30)\delta + (10k + 30)\delta \\ &= (32k + 90)\delta. \end{aligned}$$

Wegen $b_1 \geq v > b_2$ und $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$ muss $b_2 \in [a_1, b_1]$ sein. Somit gilt die Behauptung mit $u := b_2$.

Ist $v < a_2$, folgt die Behauptung analog mit $u := a_2$. □

Lemma 4.13. *Seien $\xi^+ \neq \xi^- \in \partial_\infty X$, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\{\alpha(\xi^+), \alpha(\xi^-)\} \cap \{\xi^+, \xi^-\} = \emptyset$. Seien $k > 8$, $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von ξ^- nach ξ^+ , und gelte $\min_{v,w \in \mathbb{R}} d(e(v), \alpha e(w)) \leq k\delta$. Seien a_1, b_1, a_2, b_2 die Zahlen aus Lemma 1.52 mit $e_1 := e$, $e_2 := \alpha e$, es sei $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$.*

(a) *Gilt $d(e(a_1), \alpha e(a_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e(b_1), \alpha e(b_2)) \leq 5k\delta$, so folgt:*

$$d(e(a_1), \alpha e(a_1)) \leq (42k + 90)\delta, \quad d(e(b_1), \alpha e(b_1)) \leq (42k + 90)\delta.$$

(b) *Gilt $d(e(a_1), \alpha e(b_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e(b_1), \alpha e(a_2)) \leq 5k\delta$, so gibt es ein $u \in [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ mit*

$$d(e(r), \alpha e(r)) \geq |r - u| - (32k + 98)\delta \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Beweis. In beiden Fällen gibt es nach obigem Lemma ein $u \in [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ mit $d(e(u), \alpha e(u)) \leq (32k + 90)\delta$.

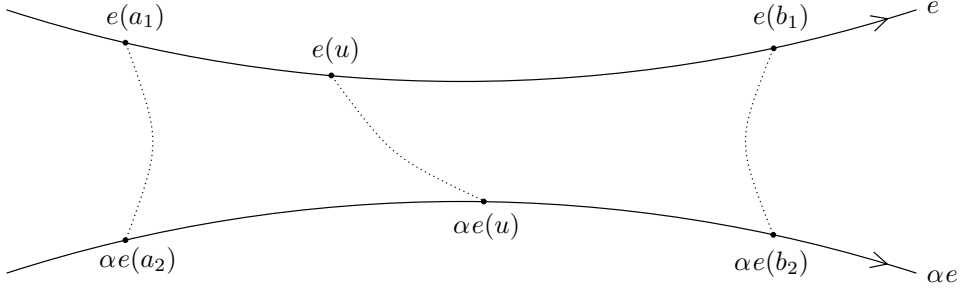


Abbildung 5: Zum Beweis von Lemma 4.13(a)

- (a) Gilt $d(e(a_1), \alpha e(a_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e(b_1), \alpha e(b_2)) \leq 5k\delta$, so folgt (Abbildung 5):

$$\begin{aligned} d(\alpha e(a_1), \alpha e(a_2)) &= |a_2 - a_1| = |(u - a_1) - (u - a_2)| \\ &= |d(e(u), e(a_1)) - d(\alpha e(u), \alpha e(a_2))| \\ &\leq d(e(u), \alpha e(u)) + d(e(a_1), \alpha e(a_2)) \\ &\leq (37k + 90)\delta. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} d(e(a_1), \alpha e(a_1)) &\leq d(e(a_1), \alpha e(a_2)) + d(\alpha e(a_2), \alpha e(a_1)) \\ &\leq (42k + 90)\delta. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung zeigt man analog.

- (b) Gelte $d(e(a_1), \alpha e(b_2)) \leq 5k\delta$ und $d(e(b_1), \alpha e(a_2)) \leq 5k\delta$. Wir zeigen, dass u die Behauptung erfüllt. Sei zuerst $r \in [u, b_1]$. Nach Lemma 1.9 gibt es $q \in [a_2, u]$ (Abbildung 6) mit

$$\begin{aligned} d(e(r), \alpha e(q)) &\leq \max \{d(e(u), \alpha e(u)), d(e(b_1), \alpha e(a_2))\} + 8\delta \\ &\leq (32k + 98)\delta. \end{aligned}$$

Wegen $q \leq u \leq r$ folgt:

$$\begin{aligned} d(e(r), \alpha e(r)) &\geq d(\alpha e(r), \alpha e(q)) - d(e(r), \alpha e(q)) \\ &\geq |r - u| - (32k + 98)\delta. \end{aligned}$$

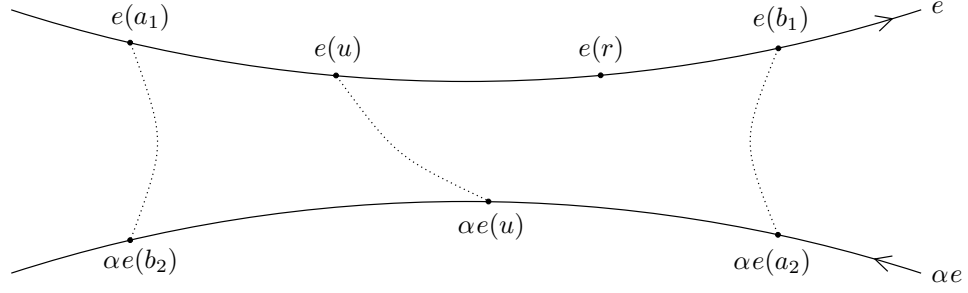


Abbildung 6: Zum Beweis von Lemma 4.13(b)

Analog für $r \in [a_1, u]$. Somit gilt die Behauptung für alle $r \in [a_1, b_1]$.

Sei nun $r > b_1$. Wegen $r > b_1 \geq u \geq a_2$ und Lemma 1.54 mit $\tilde{b} := a_2$, $l := 5k$ folgt:

$$d(e(r), \alpha e(r)) \geq |r - b_1| + |a_2 - r| - 5k\delta \geq |r - u| - 5k\delta.$$

Analog für $r < a_1$. Somit gilt die Behauptung auch für alle $r \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]$. \square

Lemma 4.14. *Seien $\xi^+ \neq \xi^- \in \partial_\infty X$, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\{\alpha(\xi^+), \alpha(\xi^-)\} \cap \{\xi^+, \xi^-\} = \emptyset$. Seien $k > 8$, $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von ξ^- nach ξ^+ , und gelte $\min_{v,w \in \mathbb{R}} d(e(v), \alpha e(w)) \leq k\delta$. Seien a_1, b_1, a_2, b_2 die Zahlen aus Lemma 1.52 mit $e_1 := e$, $e_2 := \alpha e$, es sei $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \emptyset$. Dann gibt es $u \in [a_1, b_1]$ mit*

$$d(e(r), \alpha e(r)) \geq |r - u| - k\delta \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Gelte OE $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2$. Wir zeigen die Behauptung mit $u := b_1$. (Im Fall $a_2 \leq b_2 < a_1 \leq b_1$ folgt die Behauptung analog mit $u := a_1$.) Nach Lemma 1.55 gilt für alle $r > b_1$:

$$d(e(r), \alpha e(r)) \geq d(e(r), \text{Im}(\alpha e)) \geq |r - b_1| - k\delta.$$

Sei nun $r \leq b_1$. Wegen $r \leq b_1 < a_2 \leq b_2$ ist $r < a_2$, und mit Lemma 1.55 folgt:

$$d(\alpha e(r), e(r)) \geq d(\alpha e(r), \text{Im}(e)) \geq (a_2 - r) - k\delta \geq |b_1 - r| - k\delta. \quad \square$$

Satz 4.15. Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} \cap \{\gamma^+, \gamma^-\} = \emptyset$. Seien $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ und $s, t \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$d(e(s), e(t)) \leq 2 \cdot d(e(s), \alpha e(s)) + 2 \cdot d(e(t), \alpha e(t)) + \mathcal{B}_8 \cdot \min d_\gamma + 772\delta,$$

wobei $\mathcal{B}_8 = \mathcal{B}_8(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Setze $r := 2S + 944\delta = 2 \cdot 468\delta + 2S + 8\delta$ und $\mathcal{B}_8 := \Omega(r)$.

Ist $\min_{v, w \in \mathbb{R}} d(e(v), \alpha e(w)) > 9\delta$, so folgt die Behauptung aus Lemma 1.57 mit $e_1 := e$, $e_2 := \alpha e$, $v_1 := v_2 := s$, $w_1 := w_2 := t$ und $k := 9$. Gelte also $\min_{v, w \in \mathbb{R}} d(e(v), \alpha e(w)) \leq 9\delta$. Seien a_1, b_1, a_2, b_2 die Zahlen aus Lemma 1.52 für $e_1 := e$, $e_2 := \alpha e$ und $k := 9$. Nach Lemma 1.53 tritt mindestens einer der folgenden Fälle ein:

- (1) $b_1 - a_1 \leq 90\delta$ und $b_2 - a_2 \leq 90\delta$
- (2) $d(e(a_1), \alpha e(a_2)) \leq 45\delta$, $d(e(b_1), \alpha e(b_2)) \leq 45\delta$ und $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$
- (3) $d(e(a_1), \alpha e(b_2)) \leq 45\delta$, $d(e(b_1), \alpha e(a_2)) \leq 45\delta$ und $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$
- (4) $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \emptyset$

Im Fall (2) gilt nach Lemma 4.13(a):

$$d(e(a_1), \alpha e(a_1)), d(e(b_1), \alpha e(b_1)) \leq (42 \cdot 9 + 90)\delta = 468\delta.$$

Aus Lemma 4.7(a) mit $L := 468\delta$ folgt: Ist $b_1 - a_1 \geq \Omega(r) \cdot d_{\gamma^\infty}$, so gibt es $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\gamma^n \alpha = \alpha \gamma^n$. Nach Lemma 1.46 ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} \cap \{\gamma^+, \gamma^-\} = \emptyset$. Somit ist $b_1 - a_1 < \Omega(r) \cdot d_{\gamma^\infty}$.

Wir erhalten also für die Fälle (1) und (2): $b_1 - a_1 \leq \Omega(r) \cdot \min d_{\gamma^\infty} + 90\delta$, und die gesuchte Ungleichung folgt aus Lemma 1.56 mit $v_1 := v_2 := s$, $w_1 := w_2 := t$.

In den Fällen (3) und (4) gibt es gemäss Lemma 4.13(b) und Lemma 4.14 ein $u \in [a_1, b_1]$ mit

$$d(e(r), \alpha e(r)) \geq |r - u| - (32 \cdot 9 + 98)\delta = |r - u| - 386\delta$$

für alle $r \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} d(e(s), e(t)) &= |s - t| \leq |s - u| + |u - t| \\ &\leq d(e(s), \alpha e(s)) + d(e(t), \alpha e(t)) + 772\delta. \end{aligned} \quad \square$$

Satz 4.16. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\{\alpha(\gamma^+), \alpha(\gamma^-)\} \cap \{\gamma^+, \gamma^-\} = \emptyset$ und $x, y \in X$. Dann folgt:*

$$d(x, y) \leq \mathcal{B}_9 \cdot [d(x, \gamma x) + d(y, \gamma y)] + 2 \cdot [d(x, \alpha x) + d(y, \alpha y)] + \mathcal{B}_{10},$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Sei \mathcal{B}_8 die Konstante aus obigem Satz. Setze

$$\mathcal{B}_9 := 5 \cdot \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{B}_8, \quad \mathcal{B}_{10} := 10\mathcal{R} + 832\delta.$$

Sei $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ . Seien $s, t \in \mathbb{R}$ so, dass $e(s)$ bzw. $e(t)$ Projektionen von x bzw. y auf $\text{Im}(e)$ sind. Nach Satz 3.3 gilt:

$$\begin{aligned} d(x, e(s)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(x, \gamma x) + \mathcal{R} + 6\delta, \\ d(y, e(t)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \right) \cdot d(y, \gamma y) + \mathcal{R} + 6\delta. \end{aligned}$$

Ausserdem ist nach obigem Satz

$$\begin{aligned} d(e(s), e(t)) &\leq 2 \cdot d(e(s), \alpha e(s)) + 2 \cdot d(e(t), \alpha e(t)) + \mathcal{B}_8 \cdot \min d_\gamma + 772\delta \\ &\leq 2 \cdot d(e(s), \alpha e(s)) + 2 \cdot d(e(t), \alpha e(t)) \\ &\quad + \mathcal{B}_8 \cdot [d(x, \gamma x) + d(y, \gamma y)] + 772\delta. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. \square

4.5 γ hyperbolisch, α elliptisch mit $\alpha(\gamma^+) = \gamma^-$ und $\alpha(\gamma^-) = \gamma^+$

Lemma 4.17. *Seien $\xi^+ \neq \xi^- \in \partial_\infty X$ und $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\alpha(\xi^+) = \xi^-$, $\alpha(\xi^-) = \xi^+$. Sei $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von ξ^- nach ξ^+ . Seien $L \geq 0$ und $s, t \in \mathbb{R}$ mit $d(e(s), \alpha e(s)) \leq L$, $d(e(t), \alpha e(t)) \leq L$. Dann ist $|t - s| \leq 40\delta + L$.*

Beweis. Setze $f : \mathbb{R} \rightarrow X$, $f(r) := \alpha e(-r)$. f ist eine kürzeste Geodäte mit $f(-\infty) = \alpha(\xi^+) = \xi^-$ und $f(\infty) = \alpha(\xi^-) = \xi^+$. Nach Satz 1.24(b) gibt es $u \in \mathbb{R}$ mit

$$d(e(r), \alpha e(u - r)) = d(e(r), f(r - u)) \leq 40\delta \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Mit den Voraussetzungen folgt:

$$\begin{aligned} |u - 2s| &= d(\alpha e(u - s), \alpha e(s)) \\ &\leq d(\alpha e(u - s), e(s)) + d(e(s), \alpha e(s)) \\ &\leq 40\delta + L \end{aligned}$$

und analog $|u - 2t| \leq 40\delta + L$. Zusammen erhält man:

$$|t - s| \leq \frac{1}{2} \cdot (|2t - u| + |u - 2s|) \leq 40\delta + L. \quad \square$$

Satz 4.18. Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\alpha(\gamma^+) = \gamma^-$, $\alpha(\gamma^-) = \gamma^+$ und $x, y \in X$. Dann ist

$$d(x, y) \leq \mathcal{B}_{11} \cdot [d(x, \gamma x) + d(y, \gamma y)] + [d(x, \alpha x) + d(y, \alpha y)] + \mathcal{B}_{12},$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Setze $\mathcal{B}_{11} := 3 \cdot \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right)$ und $\mathcal{B}_{12} := 4\mathcal{R} + 64\delta$.

Sei $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ . Seien $s, t \in \mathbb{R}$ so, dass $e(s)$ bzw. $e(t)$ Projektionen von x bzw. y auf $\text{Im}(e)$ sind. Nach Satz 3.3 gilt:

$$\begin{aligned} d(x, e(s)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right) \cdot d(x, \gamma x) + \mathcal{R} + 6\delta, \\ d(y, e(t)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right) \cdot d(y, \gamma y) + \mathcal{R} + 6\delta. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} d(e(s), \alpha e(s)) &\leq d(x, \alpha x) + 2 \cdot \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right) \cdot d(x, \gamma x) + 2\mathcal{R} + 12\delta, \\ d(e(t), \alpha e(t)) &\leq d(y, \alpha y) + 2 \cdot \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right) \cdot d(y, \gamma y) + 2\mathcal{R} + 12\delta. \end{aligned}$$

Nach obigem Lemma gilt:

$$\begin{aligned} d(e(s), e(t)) = |t - s| &\leq 2 \cdot \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right) \cdot [d(x, \gamma x) + d(y, \gamma y)] \\ &\quad + [d(x, \alpha x) + d(y, \alpha y)] + 2\mathcal{R} + 52\delta. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. \square

4.6 Alle Isometrien mit denselben Fixpunkten auf dem Rand

Zuerst betrachten wir zwei hyperbolische Isometrien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit denselben Fixpunkten auf dem Rand, d. h. $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} = \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}$. In der in [KKS] untersuchten Situation folgt in diesem Fall $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$ ([KKS], Lemma B.2 und [BGS], Lemma 2.3). Setzt man voraus, dass Γ torsionsfrei ist, folgt dies auch in der hier betrachteten Situation ([CDP], Chap. 10, Prop. 7.1 und [C], S. 658 unten). Ist Γ nicht notwendig torsionsfrei, benötigt man für den Fall $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} = \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}$ weitere Argumente.

Satz 4.19. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ hyperbolisch mit $\{\gamma_1^+, \gamma_1^-\} = \{\gamma_2^+, \gamma_2^-\}$. Dann gibt es $q \in \mathbb{N}^*$ mit $\gamma_1^q \gamma_2 = \gamma_2 \gamma_1^q$ und $q \leq \mathcal{B}_{13}$, wobei $\mathcal{B}_{13} = \mathcal{B}_{13}(\Omega, \delta) \in \mathbb{N}^*$.*

Beweis. Setze $r := 4\mathcal{S}$ und $\mathcal{B}_{13} := \Omega(r)$.

Gelte OE $\gamma_1^+ = \gamma_2^+, \gamma_1^- = \gamma_2^-$ (sonst betrachte γ_2^{-1} anstelle von γ_2). Setze $\gamma^+ := \gamma_1^+ = \gamma_2^+, \gamma^- := \gamma_1^- = \gamma_2^-$. Sei $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine nach Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodäte von γ^- nach γ^+ . Dann ist e sowohl eine Achse von γ_1 als auch von γ_2 .

Setze $p := e(0)$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.18 gilt:

$$\begin{aligned} d(\gamma_2 \gamma_1^n p, e(n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\ \leq d(\gamma_2 \gamma_1^n e(0), \gamma_2 e(n \cdot d_{\gamma_1^\infty})) + d(\gamma_2 e(n \cdot d_{\gamma_1^\infty}), e(n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \\ \leq 2\mathcal{S} \end{aligned}$$

und analog

$$d(\gamma_1^n \gamma_2 p, e(n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) \leq 2\mathcal{S}.$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} d(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-n} \gamma_2 \gamma_1^n p, p) &= d(\gamma_2 \gamma_1^n p, \gamma_1^n \gamma_2 p) \\ &\leq d(\gamma_2 \gamma_1^n p, e(n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty})) + d(e(n \cdot d_{\gamma_1^\infty} + d_{\gamma_2^\infty}), \gamma_1^n \gamma_2 p) \\ &\leq 4\mathcal{S} = r. \end{aligned}$$

Somit ist $\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-n} \gamma_2 \gamma_1^n p \in \overline{B}_r(p)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung an Ω ist $\#\{\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-n} \gamma_2 \gamma_1^n p \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \Omega(r)$. Also gibt es $n \neq m \in \{0, \dots, \Omega(r)\}$ mit

$\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-n}\gamma_2\gamma_1^n p = \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-m}\gamma_2\gamma_1^m p$. Da Γ frei auf X operiert, folgt $\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-n}\gamma_2\gamma_1^n = \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-m}\gamma_2\gamma_1^m$.

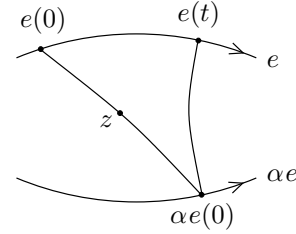
Sei OE $m > n$. Setze $p := m - n$. Dann gilt $1 \leq p \leq \Omega(r) = \mathcal{B}_{13}$ und $\gamma_1^p \gamma_2 = \gamma_2 \gamma_1^p$. \square

Zusätzlich können noch elliptische Isometrien auftreten, müssen aber nicht.

Lemma 4.20. *Seien $\xi^+ \neq \xi^- \in \partial_\infty X$, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\alpha(\xi^+) = \xi^+$, $\alpha(\xi^-) = \xi^-$ und $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von ξ^- nach ξ^+ . Dann ist $d(e(s), \alpha e(s)) \leq 110\delta$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

Beweis. $\alpha e : \mathbb{R} \rightarrow X$ ist eine kürzeste Geodäte von $\alpha(\xi^-) = \xi^-$ nach $\alpha(\xi^+) = \xi^+$. Nach Satz 1.24(b) gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit $d(\alpha e(0), e(t)) \leq 8\delta$.

Wähle je eine kürzeste Geodäte $[e(0), \alpha e(0)]$ und $[\alpha e(0), e(t)]$, sei z der Mittelpunkt von $[e(0), \alpha e(0)]$. Nach Lemma 1.42 gilt $d(z, \alpha z) \leq 6\delta$. Das Dreieck $\triangle(e(0), e(t), \alpha e(0))$ ist 4δ -dünn, somit gibt es ein $y \in [e(t), \alpha e(0)] \cup [e(0), e(t)]$ mit $d(z, y) \leq 4\delta$, also



$$\begin{aligned} d(y, \alpha y) &\leq d(y, z) + d(z, \alpha z) + d(\alpha z, \alpha y) \\ &\leq 2 \cdot 4\delta + 6\delta = 14\delta. \end{aligned}$$

Ist $y \in [e(0), e(t)]$, setze $x := y$. Ist $y \in [e(t), \alpha e(0)]$, setze $x := e(t)$. Dann ist $x \in \text{Im}(e)$ mit $d(x, \alpha x) \leq 30\delta$. Sei $u \in \mathbb{R}$ so, dass $x = e(u)$. Nach Satz 1.24(b) gibt es $v \in \mathbb{R}$ mit $d(e(s), \alpha e(s - v)) \leq 40\delta$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Dabei ist

$$|v| = d(\alpha e(u), \alpha e(u - v)) \leq d(\alpha x, x) + d(e(u), \alpha e(u - v)) \leq 70\delta.$$

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$d(e(s), \alpha e(s)) \leq d(e(s), \alpha e(s - v)) + d(\alpha e(s - v), \alpha e(s)) \leq 110\delta. \quad \square$$

Korollar 4.21. *Seien $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch, $\alpha \in \Gamma$ elliptisch mit $\alpha(\gamma^+) = \gamma^+$, $\alpha(\gamma^-) = \gamma^-$. Dann gibt es $q \in \mathbb{N}^*$ mit $\gamma^q \alpha = \alpha \gamma^q$ und $q \leq \mathcal{B}_{14}$, wobei $\mathcal{B}_{14} = \mathcal{B}_{14}(\Omega, \delta) \in \mathbb{N}^*$.*

Beweis. Sei e eine Achse von γ . Wende obiges Lemma und Lemma 4.7(a) an mit $L := 110\delta$. \square

Zusammen mit Satz 4.19 folgt:

Korollar 4.22. Seien $h, k \in \mathbb{N}^*$ mit $k \geq h$. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_h \in \Gamma$ hyperbolisch mit $\{\gamma_i^+, \gamma_i^-\} = \{\gamma_1^+, \gamma_1^-\}$ für alle $i = 1, \dots, h$ und $\alpha_{h+1}, \dots, \alpha_k \in \Gamma$ elliptisch mit $\alpha_j(\gamma_1^+) = \gamma_1^+, \alpha_j(\gamma_1^-) = \gamma_1^-$ für alle $j = h+1, \dots, k$. (Falls $k = h$ ist, sind keine elliptischen Isometrien vorhanden.) Dann gelten:

$$\gamma_1^p \gamma_i = \gamma_i \gamma_1^p \quad \forall i = 1, \dots, h \quad \text{und} \quad \gamma_1^p \alpha_j = \alpha_j \gamma_1^p \quad \forall j = h+1, \dots, k,$$

wobei \mathcal{B}_{13} die Konstante von Satz 4.19 ist, \mathcal{B}_{14} diejenige von Korollar 4.21 und $p := (\max\{\mathcal{B}_{13}, \mathcal{B}_{14}\})! \in \mathbb{N}^*$.

Satz 4.23. Seien $h, k \in \mathbb{N}^*$ mit $k \geq h$. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_h \in \Gamma$ hyperbolisch mit $\{\gamma_i^+, \gamma_i^-\} = \{\gamma_1^+, \gamma_1^-\}$ für alle $i = 1, \dots, h$ und $\alpha_{h+1}, \dots, \alpha_k \in \Gamma$ elliptisch mit $\alpha_j(\gamma_1^+) = \gamma_1^+, \alpha_j(\gamma_1^-) = \gamma_1^-$ für alle $j = h+1, \dots, k$. (Falls $k = h$ ist, sind keine elliptischen Isometrien vorhanden.) Seien $x, y \in X$. Dann gibt es $\sigma \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_h, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_k)$ mit

$$d(x, \sigma y) \leq \mathcal{B}_{15} \cdot [d(x, \gamma_1 x) + d(y, \gamma_1 y)] + \mathcal{B}_{16},$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(\Omega, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Sei \mathcal{B}_{13} die Konstante von Satz 4.19, \mathcal{B}_{14} diejenige von Korollar 4.21, $p := (\max\{\mathcal{B}_{13}, \mathcal{B}_{14}\})! \in \mathbb{N}^*$. Setze $\mathcal{B}_{15} := \frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} + p$, $\mathcal{B}_{16} := \mathcal{S} + 2\mathcal{R} + 12\delta$.

Sei $e : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Achse von γ_1 . Seien $e(s)$ bzw. $e(t)$ Projektionen von x bzw. y auf $\text{Im}(e)$. Nach Satz 3.3 ist

$$\begin{aligned} d(x, e(s)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right) \cdot d(x, \gamma_1 x) + \mathcal{R} + 6\delta, \\ d(y, e(t)) &\leq \left(\frac{6\delta}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\right) \cdot d(y, \gamma_1 y) + \mathcal{R} + 6\delta. \end{aligned}$$

Es gibt $z \in \mathbb{Z}$ mit

$$|(t + pz \cdot d_{\gamma_1^\infty}) - s| \leq p \cdot d_{\gamma_1^\infty} \leq p \cdot \min d_{\gamma_1} \leq p \cdot [d(x, \gamma_1 x) + d(y, \gamma_1 y)].$$

Setze $\sigma := \gamma_1^{pz}$. Nach obigem Korollar ist $\sigma \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_h, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_k)$, und nach Satz 2.18 gilt:

$$\begin{aligned} d(e(s), \sigma e(t)) &\leq d(e(s), e(t + pz \cdot d_{\gamma_1^\infty})) + \mathcal{S} \\ &\leq p \cdot [d(x, \gamma_1 x) + d(y, \gamma_1 y)] + \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. □

Satz 4.1 folgt nun aus Satz 4.2, Satz 4.5, Satz 4.11, Satz 4.16, Satz 4.18 und Satz 4.23 zusammen mit Satz 4.6 und Satz 4.8.

Bemerkung 4.24. Seien Γ eine hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem Σ und $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ der dazugehörige Cayley-Graph. Die Operation von Γ auf $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ ist frei genau dann, wenn Σ kein Element der Ordnung zwei enthält. Enthält Σ ein Element der Ordnung zwei, ist Satz 4.1 also nicht anwendbar.

Mit einem kleinen Umweg können wir ein Analogon zu Satz 4.1 aber auch in dieser Situation zeigen. Dazu definieren wir einen *orientierten* metrischen Graphen $\mathfrak{H}(\Gamma, \Sigma)$ folgendermassen: Die Ecken seien genau die Elemente von Γ . Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, so gibt es eine Kante von γ_1 nach γ_2 genau dann, wenn ein $\sigma \in \Sigma \cup \Sigma^{-1} \setminus \{e\}$ existiert mit $\gamma_2 = \gamma_1 \sigma$. Jede Kante sei isometrisch zum Intervall $[0, 1]$, $d_{\mathfrak{H}}$ sei die dazugehörige Längenmetrik auf $\mathfrak{H}(\Gamma, \Sigma)$. $(\mathfrak{H}(\Gamma, \Sigma), d_{\mathfrak{H}})$ ist ein eigentlicher, geodätischer metrischer Raum.

Die Operation von Γ auf sich selbst durch Linkstranslation kann kanonisch auf $\mathfrak{H}(\Gamma, \Sigma)$ ausgedehnt werden, so dass $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathfrak{H}(\Gamma, \Sigma))$ ist und so dass jedes $\gamma \in \Gamma$ die Orientierung aller Kanten erhält. Diese Operation von Γ auf $\mathfrak{H}(\Gamma, \Sigma)$ ist frei, total diskontinuierlich und kokompakt, also kann Satz 4.1 angewendet werden.

Ausserdem ist die natürliche Projektion $P : (\mathfrak{H}(\Gamma, \Sigma), d_{\mathfrak{H}}) \longrightarrow (\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma), d_{\mathfrak{G}})$ eine surjektive $(1, 1)$ -Quasi-Isometrie mit $\gamma \circ P = P \circ \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Damit erhält man schliesslich:

Seien Γ eine hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem Σ und $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ der dazugehörige Cayley-Graph. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ und $x, y \in \mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$. Dann gibt es $\sigma \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit

$$d_{\mathfrak{G}}(x, \sigma y) \leq \mathcal{C} \cdot \max_{i=1, \dots, n} d_{\mathfrak{G}}(x, \gamma_i x) + \mathcal{C} \cdot \max_{i=1, \dots, n} d_{\mathfrak{G}}(y, \gamma_i y) + \mathcal{C},$$

wobei die Konstante $\mathcal{C} \in \mathbb{R}_+$ nur von $\#\Sigma$ und der Hyperbolizitätskonstante von $\mathfrak{G}(\Gamma, \Sigma)$ abhängt.

4.7 Satz 0.2 für Mannigfaltigkeiten

Um Satz 0.1 zu beweisen, brauchen wir Satz 0.2 für Räume mit Mannigfaltigkeitsstruktur.

Satz 4.25. *Seien $N \in \mathbb{N}^*$, $D > 0$, $\varrho \in (0, D]$ und $\kappa_1 \leq \kappa_2 \in \mathbb{R}$ sowie $\delta > 0$. Sei M eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{diam}(M) \leq D$, $\text{inj}(M) \geq \varrho$ und $\kappa_1 \leq K_M \leq \kappa_2$. Seien $\pi : X \rightarrow M$ die universelle Überlagerung und Γ die Decktransformationsgruppe. X sei δ -hyperbolisch. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ und $x, y \in X$. Dann gibt es $\sigma \in Z(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit*

$$d(x, \sigma y) \leq \mathcal{B}_{17} \cdot \max_{i=1, \dots, n} d(x, \gamma_i x) + \mathcal{B}_{17} \cdot \max_{i=1, \dots, n} d(y, \gamma_i y) + \mathcal{B}_{18},$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. In Satz A.3 zeigen wir: Es gibt eine nur von $N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2$ abhängige Abbildung $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ mit $\#(\Gamma y \cap \overline{B}_r(z)) \leq \Omega(r)$ für alle $r \geq 0$ und $y, z \in X$. Somit folgt Satz 4.25 aus Satz 4.1. \square

5 Homotopien

In Kapitel 5 seien immer $N \in \mathbb{N}^*$, $D > 0$, $\varrho \in (0, D]$, $\kappa_1 \leq \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. M sei eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{diam}(M) \leq D$, $\text{inj}(M) \geq \varrho$ und $\kappa_1 \leq K_M \leq \kappa_2$. Seien $\pi : X \rightarrow M$ die universelle Überlagerung und Γ die Decktransformationsgruppe. X sei δ -hyperbolisch.

Mit den kalligraphischen Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ bezeichnen wir Konstanten, die nur von $N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta$ abhängen.

In Abschnitt 5.1 beweisen wir Satz 0.1, in Abschnitt 5.2 geben wir weitere Anwendungen der bisher gefundenen Abschätzungen an. Dazu verwenden wir mehrfach Satz A.4, für dessen Formulierung und Beweis auf Anhang A verwiesen sei.

5.1 Beweis von Satz 0.1

Definition 5.1. Sei G ein zusammenhängender metrischer Graph.

- G heisst endlich, wenn G endlich viele Ecken und Kanten hat.
- Eine Ecke von G heisst Wurzel, wenn sie nur an eine Kante angrenzt.

Definition 5.2. Seien Y ein metrischer Raum, G ein endlicher, zusammenhängender metrischer Graph und $u : G \rightarrow Y$ stetig. Für jede Kante e von G ist $L(u|_e)$ die Länge von u eingeschränkt auf e . Man definiert die Länge $L(u)$ als Summe über alle diese Längen

$$L(u) := \sum_{e \text{ Kante von } G} L(u|_e).$$

Satz 5.3. Sei T ein endlicher, zusammenhängender metrischer Baum mit K Kanten. Seien $F, G : T \rightarrow X$ stetige Abbildungen, so dass es $h \in \mathbb{N}$ und $2h$ verschiedene Wurzeln p_1^\pm, \dots, p_h^\pm von T sowie Isometrien $\gamma_1, \dots, \gamma_h \in \Gamma$ gibt mit $\gamma_i F(p_i^+) = F(p_i^-)$ und $\gamma_i G(p_i^+) = G(p_i^-)$ für alle $i = 1, \dots, h$. Sei $t_0 \in T$ ein Basispunkt.

Dann gibt es eine stetige Abbildung $A : T \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $A(u, 0) = F(u)$, $A(u, 1) = G(u)$ für alle $u \in T$, $\gamma_i A(p_i^+, s) = A(p_i^-, s)$ für alle $i = 1, \dots, h$, $s \in [0, 1]$ und

$$\sup_{u \in T} L(s \mapsto A(u, s)) \leq \mathcal{B}_{19} \cdot [d(F(t_0), G(t_0)) + 2 \max\{L(F), L(G)\}] + \mathcal{B}_{20},$$

$$\sup_{s \in [0,1]} L(u \mapsto A(u, s)|_{u \in T}) \leq \mathcal{B}_{21} \cdot \max\{L(F), L(G)\} + K \cdot \mathcal{B}_{22},$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Gelte OE $L(F), L(G) < \infty$. Setze $\nu := \frac{1}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} > 0$ und $L := \nu + 8\delta > 0$, wobei $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} := \infty$ sei für $\kappa_2 \leq 0$. Sei $C = C(L; N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2)$ die Konstante aus Satz A.4. Setze $\mathcal{B}_{19} := \frac{C}{\delta}$, $\mathcal{B}_{20} := C + 4\nu$, $\mathcal{B}_{21} := 4 + \frac{4C}{\nu}$, $\mathcal{B}_{22} := C$.

Schritt I) Für alle $i = 1, \dots, h$ sei $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $F(p_i^+)$ nach $G(p_i^+)$. Dann ist $\gamma_i \sigma_i : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $\gamma_i F(p_i^+) = F(p_i^-)$ nach $\gamma_i G(p_i^+) = G(p_i^-)$. Wir setzen zur Abkürzung $J := d(F(t_0), G(t_0))$ und $H := \max\{L(F), L(G)\} \in \mathbb{R}_+$. Für alle $t, u \in T$ ist

$$\begin{aligned} d(F(t), G(u)) &\leq d(F(t), F(t_0)) + d(F(t_0), G(t_0)) + d(G(t_0), G(u)) \\ &\leq 2H + J. \end{aligned}$$

Insbesondere ist auch $L(\sigma_i) = L(\gamma_i \sigma_i) \leq 2H + J$ für alle $i = 1, \dots, h$.

T habe E Ecken ($E = K + 1$, vgl. [KKS]). Seien e_1, \dots, e_E die Ecken und q_1, \dots, q_K die Kanten von T . Für jedes $j \in \{1, \dots, E\}$ sei $\zeta_j : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $F(e_j)$ nach $G(e_j)$. Ist $e_j = p_i^+$ für ein $i \in \{1, \dots, h\}$, sei speziell $\zeta_j := \sigma_i$. Ist $e_j = p_i^-$ für ein $i \in \{1, \dots, h\}$, sei speziell $\zeta_j := \gamma_i \sigma_i$. Für $k = 1, \dots, K$ setze $H_k := \max\{L(F|_{q_k}), L(G|_{q_k})\}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^K H_k \leq 2H. \quad (15)$$

Schritt II) Sei nun $k \in \{1, \dots, K\}$, q_k verbinde die Ecken e_{k_1} und e_{k_2} . Sei $f_k : [0, l_k] \rightarrow T$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge von q_k , d. h. $L(f_k) = l_k > 0$, $f_k(0) = e_{k_1}$, $f_k(l_k) = e_{k_2}$. Setze

$$n_k := \left\lfloor \frac{H_k}{\nu} \right\rfloor + 1.$$

Es gibt Unterteilungen $0 = u_0 \leq \dots \leq u_{n_k} = l_k$ und $0 = v_0 \leq \dots \leq v_{n_k} = l_k$ mit $L(F \circ f_k|_{[u_{r-1}, u_r]}) \leq \nu$ und $L(G \circ f_k|_{[v_{r-1}, v_r]}) \leq \nu$ für alle $r = 1, \dots, n_k$. Setzt man diese beiden Unterteilungen zusammen, so erhält man eine neue

Unterteilung $0 = w_0 \leq \dots \leq w_{2n_k-1} = l_k$ mit $L(F \circ f_k|_{[w_{r-1}, w_r]}) \leq \nu$ und $L(G \circ f_k|_{[w_{r-1}, w_r]}) \leq \nu$ für alle $r = 1, \dots, 2n_k - 1$.

Für $r = 0, \dots, 2n_k - 1$ setze $y_r^F := F \circ f_k(w_r)$, $y_r^G := G \circ f_k(w_r)$, insbesondere ist $y_0^F = F(e_{k_1})$, $y_{2n_k-1}^F = F(e_{k_2})$ und $y_0^G = G(e_{k_1})$, $y_{2n_k-1}^G = G(e_{k_2})$. Für jedes $r \in \{0, \dots, 2n_k - 1\}$ sei $\vartheta_r : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von y_r^F nach y_r^G , wobei wir speziell $\vartheta_0 := \zeta_{k_1}$ und $\vartheta_{2n_k-1} := \zeta_{k_2}$ wählen. Für alle $r = 0, \dots, 2n_k - 1$ gilt:

$$L(\vartheta_r) = d(y_r^F, y_r^G) \leq 2H + J.$$

Weiter ist für alle $r = 0, \dots, 2n_k - 2$

$$d(y_r^F, y_{r+1}^F) \leq L(F \circ f_k|_{[w_r, w_{r+1}]}) \leq \nu,$$

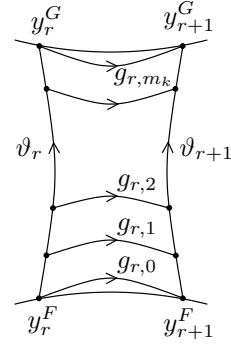
$$d(y_r^G, y_{r+1}^G) \leq L(G \circ f_k|_{[w_r, w_{r+1}]}) \leq \nu.$$

Setze

$$m_k := \left\lfloor \frac{J + 2H}{\delta} \right\rfloor + 1.$$

Für alle $r \in \{0, \dots, 2n_k - 2\}$ und $p \in \{0, \dots, m_k\}$ sei $g_{r,p} : [w_r, w_{r+1}] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $\vartheta_r(\frac{p}{m_k})$ nach $\vartheta_{r+1}(\frac{p}{m_k})$. Nach Lemma 1.9 gilt:

$$\begin{aligned} L(g_{r,p}) &= d(\vartheta_r(\frac{p}{m_k}), \vartheta_{r+1}(\frac{p}{m_k})) \\ &\leq \max\{d(y_r^F, y_{r+1}^F), d(y_r^G, y_{r+1}^G)\} + 8\delta \\ &\leq \nu + 8\delta. \end{aligned}$$



Ausserdem gilt für alle $r = 0, \dots, 2n_k - 1$ und $p = 0, \dots, m_k - 1$ nach Definition von m_k :

$$d(\vartheta_r(\frac{p}{m_k}), \vartheta_r(\frac{p+1}{m_k})) = L(\vartheta_r|_{[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}]}) = \frac{1}{m_k} \cdot L(\vartheta_r) \leq \frac{1}{m_k} \cdot (2H + J) < \delta.$$

Somit sind für alle $r \in \{0, \dots, 2n_k - 2\}$ und $p \in \{0, \dots, m_k - 1\}$

$$\begin{aligned} \vartheta_r|_{[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}]} : [\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}] &\longrightarrow X, & \vartheta_{r+1}|_{[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}]} : [\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}] &\longrightarrow X, \\ g_{r,p} : [w_r, w_{r+1}] &\longrightarrow X, & g_{r,p+1} : [w_r, w_{r+1}] &\longrightarrow X \end{aligned}$$

kürzeste Geodäten mit

$$\begin{aligned}\vartheta_r\left(\frac{p}{m_k}\right) &= g_{r,p}(w_r), & \vartheta_r\left(\frac{p+1}{m_k}\right) &= g_{r,p+1}(w_r) \\ \vartheta_{r+1}\left(\frac{p}{m_k}\right) &= g_{r,p}(w_{r+1}), & \vartheta_{r+1}\left(\frac{p+1}{m_k}\right) &= g_{r,p+1}(w_{r+1})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}L(\vartheta_r|_{[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}]}) &, L(\vartheta_{r+1}|_{[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}]}) \leq \delta < L, \\ L(g_{r,p}) &, L(g_{r,p+1}) \leq \nu + 8\delta = L.\end{aligned}$$

Nach Satz A.4 gibt es für alle $r \in \{0, \dots, 2n_k - 2\}$ und $p \in \{0, \dots, m_k - 1\}$ eine stetige Abbildung

$$A_{r,p} : [w_r, w_{r+1}] \times \left[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}\right] \longrightarrow X$$

mit

$$\begin{aligned}A_{r,p}\left(t, \frac{p}{m_k}\right) &= g_{r,p}(t), & A_{r,p}\left(t, \frac{p+1}{m_k}\right) &= g_{r,p+1}(t) & \forall t \in [w_r, w_{r+1}], \\ A_{r,p}(w_r, s) &= \vartheta_r(s), & A_{r,p}(w_{r+1}, s) &= \vartheta_{r+1}(s) & \forall s \in \left[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}\right]\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}L(t \mapsto A_{r,p}(t, s)) &\leq C & \forall s \in \left[\frac{p}{m_k}, \frac{p+1}{m_k}\right], \\ L(s \mapsto A_{r,p}(t, s)) &\leq C & \forall t \in [w_r, w_{r+1}].\end{aligned}$$

Setzt man nun alle $A_{r,p}$ zusammen, so ergibt dies eine stetige Abbildung $A^k : [0, l_k] \times [0, 1] \longrightarrow X$ mit

$$\begin{aligned}A^k(t, 0) &= g_{r,0}(t), & A^k(t, 1) &= g_{r,m_k}(t) & \forall t \in [w_r, w_{r+1}], \\ A^k(0, s) &= \zeta_{k_1}(s), & A^k(l_k, s) &= \zeta_{k_2}(s) & \forall s \in [0, 1]\end{aligned}$$

sowie

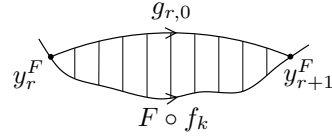
$$\begin{aligned}L(s \mapsto A^k(t, s)) &\leq m_k \cdot C \leq \left(\frac{J + 2H}{\delta} + 1\right) \cdot C & \forall t \in [0, l_k], \\ L(t \mapsto A^k(t, s)) &\leq (2n_k - 1) \cdot C \leq \left(\frac{2H_k}{\nu} + 1\right) \cdot C & \forall s \in [0, 1]\end{aligned}$$

nach Definition von m_k, n_k .

Schritt III) Sei $r \in \{0, \dots, 2n_k - 2\}$. Für alle $t \in [w_r, w_{r+1}]$ ist

$$\begin{aligned} d(F \circ f_k(t), g_{r,0}(t)) &\leq d(F \circ f_k(t), F \circ f_k(w_r)) + d(g_{r,0}(w_r), g_{r,0}(t)) \\ &\leq L(F \circ f_k|_{[w_r, t]}) + L(g_{r,0}|_{[w_r, t]}) \\ &\leq 2 \cdot L(F \circ f_k|_{[w_r, w_{r+1}]}) \\ &\leq 2\nu = \frac{1}{50} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}. \end{aligned}$$

Somit gibt es für jedes $t \in [w_r, w_{r+1}]$ genau eine kürzeste Geodäte $b_t : [-\nu, 0] \rightarrow X$ von $F \circ f_k(t)$ nach $g_{r,0}(t)$, und die Abbildung



$$B_r : [w_r, w_{r+1}] \times [-\nu, 0] \rightarrow X, \quad B_r(t, s) := b_t(s)$$

ist stetig mit

$$\begin{aligned} B_r(t, -\nu) &= F \circ f_k(t), & B_r(t, 0) &= g_{r,0}(t) & \forall t \in [w_r, w_{r+1}], \\ B_r(w_r, s) &\equiv y_r^F, & B_r(w_{r+1}, s) &\equiv y_{r+1}^F & \forall s \in [-\nu, 0] \end{aligned}$$

sowie

$$L(s \mapsto B_r(t, s)) = L(b_t) = d(F \circ f_k(t), g_{r,0}(t)) \leq 2\nu \quad \forall t \in [w_r, w_{r+1}].$$

Mit dem Invers-Toponogov-Theorem ([Gr], Theorem 3.9) folgt ausserdem wie im Beweis von Satz A.4, Schritt IV für alle $s \in [-\nu, 0]$:

$$L(t \mapsto B_r(t, s)) \leq L(g_{r,0}) + L(F \circ f_k|_{[w_r, w_{r+1}]}) \leq 2 \cdot L(F \circ f_k|_{[w_r, w_{r+1}]}) .$$

Setzt man nun alle B_r zusammen, erhält man somit eine stetige Abbildung $B^k : [0, l_k] \times [-\nu, 0] \rightarrow X$ mit

$$\begin{aligned} B^k(t, -\nu) &= F \circ f_k(t) \quad \forall t \in [0, l_k], \\ B^k(t, 0) &= g_{r,0}(t) \quad \forall t \in [w_r, w_{r+1}], \\ B^k(0, s) &\equiv F(e_{k_1}) \quad \text{und} \quad B^k(l_k, s) \equiv F(e_{k_2}) \quad \forall s \in [-\nu, 0] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} L(s \mapsto B^k(t, s)) &\leq 2\nu \quad \forall t \in [0, l_k], \\ L(t \mapsto B^k(t, s)) &\leq \sum_{r=0}^{2n_k-2} 2 \cdot L(F \circ f_k|_{[w_r, w_{r+1}]}) = 2 \cdot L(F \circ f_k) \quad \forall s \in [-\nu, 0]. \end{aligned}$$

Analog findet man eine stetige Abbildung $C^k : [0, l_k] \times [1, 1 + \nu] \longrightarrow X$ mit

$$\begin{aligned} C^k(t, 1) &= g_{r, m_k}(t) \quad \forall t \in [w_r, w_{r+1}], \\ C^k(t, 1 + \nu) &= G \circ f_k(t) \quad \forall t \in [0, l_k], \\ C^k(0, s) &\equiv G(e_{k_1}) \quad \text{und} \quad C^k(l_k, s) \equiv G(e_{k_2}) \quad \forall s \in [1, 1 + \nu] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} L(s \mapsto C^k(t, s)) &\leq 2\nu \quad \forall t \in [0, l_k], \\ L(t \mapsto C^k(t, s)) &\leq 2 \cdot L(G \circ f_k) \quad \forall s \in [1, 1 + \nu]. \end{aligned}$$

Schritt IV) Man setzt A^k , B^k , C^k zusammen:

$$\begin{aligned} E^k &: [0, l_k] \times [-\nu, 1 + \nu] \longrightarrow X, \\ E^k(t, s) &:= \begin{cases} B^k(t, s) & \text{für } s \in [-\nu, 0] \\ A^k(t, s) & \text{für } s \in [0, 1] \\ C^k(t, s) & \text{für } s \in [1, 1 + \nu] \end{cases} \end{aligned}$$

ist stetig mit $E^k(t, -\nu) = F \circ f_k(t)$ und $E^k(t, 1 + \nu) = G \circ f_k(t)$ für alle $t \in [0, l_k]$,

$$\begin{aligned} E^k(0, s) &= \begin{cases} F(e_{k_1}) & \text{für } s \in [-\nu, 0] \\ \zeta_{k_1}(s) & \text{für } s \in [0, 1] \\ G(e_{k_1}) & \text{für } s \in [1, 1 + \nu], \end{cases} \\ E^k(l_k, s) &= \begin{cases} F(e_{k_2}) & \text{für } s \in [-\nu, 0] \\ \zeta_{k_2}(s) & \text{für } s \in [0, 1] \\ G(e_{k_2}) & \text{für } s \in [1, 1 + \nu] \end{cases} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} L(s \mapsto E^k(t, s)) &\leq 4\nu + \left(\frac{J + 2H}{\delta} + 1\right) \cdot C \quad \forall t \in [0, l_k], \\ L(t \mapsto E^k(t, s)) &\leq \begin{cases} 2 \cdot L(F \circ f_k) & \text{für } s \in [-\nu, 0] \\ \left(\frac{2H_k}{\nu} + 1\right) \cdot C & \text{für } s \in [0, 1] \\ 2 \cdot L(G \circ f_k) & \text{für } s \in [1, 1 + \nu]. \end{cases} \end{aligned}$$

E^k induziert nun eine stetige Abbildung $P^k : q_k \times [-\nu, 1 + \nu] \longrightarrow X$ mit $P^k(u, -\nu) = F(u)$ und $P^k(u, 1 + \nu) = G(u)$ für alle $u \in q_k$,

$$P^k(e_{k_i}, s) = \begin{cases} \zeta_{k_i}(0) & \text{für } s \in [-\nu, 0] \\ \zeta_{k_i}(s) & \text{für } s \in [0, 1] \\ \zeta_{k_i}(1) & \text{für } s \in [1, 1 + \nu] \end{cases}$$

für $i = 1, 2$ sowie

$$\begin{aligned} L(s \mapsto P^k(u, s)) &\leq 4\nu + \left(\frac{J + 2H}{\delta} + 1\right) \cdot C \quad \forall u \in q_k, \\ L(u \mapsto P^k(u, s)|_{u \in q_k}) &\leq \begin{cases} 2H_k & \text{für } s \in [-\nu, 0] \cup [1, 1 + \nu] \\ \left(\frac{2H_k}{\nu} + 1\right) \cdot C & \text{für } s \in [0, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Schritt V) Diese Konstruktion führe man für jedes $k = 1, \dots, K$ durch und erhält: Die Abbildung

$$P : T \times [-\nu, 1 + \nu] \longrightarrow X, \quad P(u, s) := P^k(u, s) \quad \text{für } u \in q_k$$

ist stetig mit $P(u, -\nu) = F(u)$ und $P(u, 1 + \nu) = G(u)$ für alle $u \in T$,

$$P(e_j, s) = \begin{cases} \zeta_j(0) & \text{für } s \in [-\nu, 0] \\ \zeta_j(s) & \text{für } s \in [0, 1] \\ \zeta_j(1) & \text{für } s \in [1, 1 + \nu] \end{cases}$$

für alle $j = 1, \dots, E$ sowie

$$\begin{aligned} L(s \mapsto P(u, s)) &\leq 4\nu + \left(\frac{J + 2H}{\delta} + 1\right) \cdot C = \frac{C}{\delta} \cdot (J + 2H) + C + 4\nu \\ &= \mathcal{B}_{19} \cdot [d(F(t_0), G(t_0)) + 2 \max\{L(F), L(G)\}] + \mathcal{B}_{20} \end{aligned}$$

für alle $u \in T$ und

$$\begin{aligned} L(u \mapsto P(u, s)|_{u \in T}) &\leq \begin{cases} \sum_{k=1}^K 2H_k & \text{für } s \in [-\nu, 0] \cup [1, 1 + \nu] \\ \sum_{k=1}^K \left(\frac{2H_k}{\nu} + 1\right) \cdot C & \text{für } s \in [0, 1] \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} 4H & \text{für } s \in [-\nu, 0] \cup [1, 1 + \nu] \\ \frac{4C}{\nu} \cdot H + K \cdot C & \text{für } s \in [0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\leq \mathcal{B}_{21} \cdot \max\{L(F), L(G)\} + \mathcal{B}_{22} \cdot K$$

für alle $s \in [-\nu, 1 + \nu]$ nach (15).

Seien $i \in \{1, \dots, h\}$ und $k_1, k_2 \in \{1, \dots, E\}$ mit $p_i^+ = e_{k_1}$, $p_i^- = e_{k_2}$. Nach Konstruktion ist $\zeta_{k_1} = \sigma_i$ und $\zeta_{k_2} = \gamma_i \sigma_i$. Damit folgt $\gamma_i P(p_i^+, s) = P(p_i^-, s)$ für alle $s \in [-\nu, 1 + \nu]$ und $i \in \{1, \dots, h\}$. Upparametrisierung ergibt die Behauptung. \square

Damit können wir Satz 0.1 beweisen. Satz 5.4 enthält im Vergleich zu Satz 0.1 zusätzlich eine zweite Abschätzung, welche allerdings von der Anzahl Kanten des betrachteten Graphen abhängt.

Satz 5.4. *Seien G ein endlicher, zusammenhängender metrischer Graph mit K Kanten und $a_0, a_1 : G \rightarrow M$ stetig und homotop. Dann gibt es eine stetige Abbildung $A : G \times [0, 1] \rightarrow M$ mit $A(u, 0) = a_0(u)$, $A(u, 1) = a_1(u)$ für alle $u \in G$ sowie*

$$\begin{aligned} \sup_{u \in G} L(s \mapsto A(u, s)) &\leq \mathcal{B}_{23} \cdot [L(a_0) + L(a_1)] + \mathcal{B}_{24}, \\ \sup_{s \in [0, 1]} L(u \mapsto A(u, s)|_{u \in G}) &\leq \mathcal{B}_{25} \cdot [L(a_0) + L(a_1)] + K \cdot \mathcal{B}_{26}, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Seien $\mathcal{B}_{19}, \mathcal{B}_{20}, \mathcal{B}_{21}, \mathcal{B}_{22}$ die Konstanten aus Satz 5.3 und $\mathcal{B}_{17}, \mathcal{B}_{18}$ diejenigen aus Satz 4.25. Setze $\mathcal{B}_{23} := 2\mathcal{B}_{19} \cdot (\mathcal{B}_{17} + 1)$, $\mathcal{B}_{24} := \mathcal{B}_{19} \cdot \mathcal{B}_{18} + \mathcal{B}_{20}$, $\mathcal{B}_{25} := \mathcal{B}_{21}$, $\mathcal{B}_{26} := 2\mathcal{B}_{22}$.

Man beweist Satz 5.4 nun ähnlich wie Theorem 2.1 in [KKS], wobei man Satz 4.25 und Satz 5.3 benützt. \square

Bemerkung 5.5. Metrische Bäume sind 0-hyperbolisch. Mit Satz 4.1 zeigt man analog zu Theorem 2.1 in [KKS] auch: Seien G, F zusammenhängende, endliche metrische Graphen, $a_0, a_1 : G \rightarrow F$ stetig und homotop. Dann gibt es eine Homotopie $A : G \times [0, 1] \rightarrow F$ mit $A(\cdot, 0) = a_0$, $A(\cdot, 1) = a_1$ und

$$\sup_{u \in G} L(s \mapsto A(u, s)) \leq \mathcal{T} \cdot [L(a_0) + L(a_1)] + \mathcal{T},$$

wobei die Konstante $\mathcal{T} = \mathcal{T}(F) \in \mathbb{R}_+$ nur von F abhängt.

5.2 Kürzeste Repräsentanten von Homotopieklassen von Loops

Konvention. Mit homotop bzw. Homotopieklasse sei immer *frei* homotop bzw. *freie* Homotopieklasse gemeint.

Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $S^1 \rightarrow M$ entsprechen bijektiv den Konjugationsklassen von Elementen aus Γ . Im Folgenden untersuchen wir kürzeste Repräsentanten von solchen Homotopieklassen. Dabei heisst eine stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow M$ ein kürzester Repräsentant ihrer Homotopieklasse, wenn für jede stetige Abbildung $h : S^1 \rightarrow M$, welche homotop zu f ist, $L(f) \leq L(h)$ gilt.

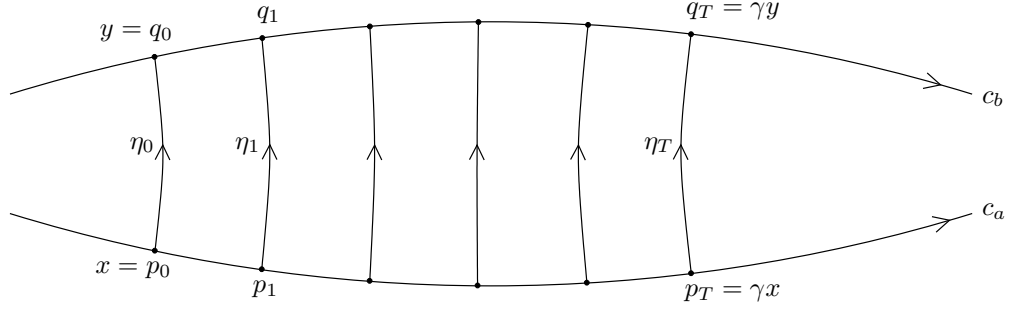
In jeder Homotopieklasse existiert mindestens ein kürzester Repräsentant (siehe Satz 1.51). Bei negativer Krümmung sind kürzeste Repräsentanten bis auf Parametrisierung eindeutig. Ist die universelle Überlagerung nur Gromov-hyperbolisch, muss dies nicht gelten. Es zeigt sich aber, dass zwei verschiedene – in einem mittels Homotopien definierten Sinn – nicht beliebig weit voneinander entfernt sein können.

In den folgenden Sätzen identifizieren wir die eindimensionale Sphäre S^1 mit dem Quotienten $[0, 1] / \{0, 1\}$. $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1] / \{0, 1\} = S^1$ sei die kanonische Projektion.

Satz 5.6. *Seien $f, g : S^1 = [0, 1] / \{0, 1\} \rightarrow M$ stetige, proportional zur Bogenlänge parametrisierte, homotope Abbildungen, so dass f und g kürzeste Repräsentanten ihrer Homotopieklasse sind. Dann sind f, g C^∞ -geschlossene Geodäten, und es gibt eine nach Bogenlänge parametrisierte Umparametrisierung $\hat{g} : S^1 \rightarrow M$ von g und eine stetige Abbildung $A : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ mit $A(t, 0) = f(t)$, $A(t, 1) = \hat{g}(t)$ für alle $t \in S^1$ und $\sup_{t \in S^1} L(s \mapsto A(t, s)) \leq \mathcal{B}_{27}$, wobei $\mathcal{B}_{27} = \mathcal{B}_{27}(N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta) \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Seien $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ die Abbildung aus Satz A.3, \mathcal{B}_3 die Konstante aus Satz 4.2 und $L_1 := 2\mathcal{R} + 8\delta$, $L_2 := \mathcal{B}_3 + 6\delta$. Da Ω nur von N, D, ϱ, κ_1 und κ_2 abhängt, sind \mathcal{R} und \mathcal{B}_3 nur von $N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta$ abhängig. Seien $C_1 = C_1(L_1; N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2)$ und $C_2 = C_2(L_2; N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2)$ die Konstanten aus Satz A.4. Setze $\mathcal{B}_{27} := \max\{C_1, C_2\}$.

Seien $a, b : [0, 1] \rightarrow M$, $a := f \circ \varphi$, $b := g \circ \varphi$. Da f und g homotop sind, gibt es $\gamma \in \Gamma$ und Lifte $\bar{a}, \bar{b} : [0, 1] \rightarrow X$ von a, b mit $\gamma\bar{a}(0) = \bar{a}(1)$ und $\gamma\bar{b}(0) = \bar{b}(1)$. Da f, g kürzeste Repräsentanten ihrer Homotopieklasse

Abbildung 7: Fall 1 mit hyperbolischem γ

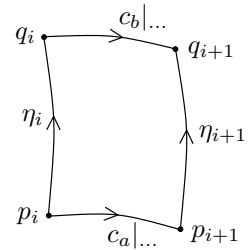
sind, sind \bar{a}, \bar{b} kürzeste Geodäten, und auf \bar{a}, \bar{b} wird unter γ die minimale Verschiebung angenommen, d. h. $d(\bar{a}(t), \gamma \bar{a}(t)) = d(\bar{b}(t), \gamma \bar{b}(t)) = \min d_\gamma$ für alle $t \in [0, 1]$.

Fall 1: Sei γ hyperbolisch. Seien $c_a, c_b : \mathbb{R} \rightarrow X$ die Fortsetzungen von \bar{a}, \bar{b} zu Riemannschen Geodäten. Nach Bemerkung 2.4 sind c_a, c_b bis auf Parametrisierung Quasi-Achsen von γ , für alle $z \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ ist $c_a(z+t) = \gamma^z c_a(t)$, $c_b(z+t) = \gamma^z c_b(t)$. Setze $x := \bar{a}(0) = c_a(0)$. Wegen $d_H(\text{Im}(c_a), \text{Im}(c_b)) \leq 2\mathcal{R}$ gibt es $r \in \mathbb{R}$ mit $d(x, c_b(r)) \leq 2\mathcal{R}$. Setze $y := c_b(r)$. $c_a|_{[0,1]}$ und $c_b|_{[r, r+1]}$ sind minimierend.

Sei $T := \lceil \frac{\min d_\gamma}{\mathcal{R}} \rceil$. Für alle $i = 0, \dots, T$ setze $p_i := c_a(\frac{i}{T})$, $q_i := c_b(r + \frac{i}{T})$. Es gelten $p_0 = x$, $q_0 = y$ und $p_T = \gamma x$, $q_T = \gamma y$ sowie $d(p_i, p_{i+1}) = d(q_i, q_{i+1}) = \frac{\min d_\gamma}{T} \leq \mathcal{R}$. Für $i = 0, \dots, T-1$ sei $\eta_i : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von p_i nach q_i , setze $\eta_T := \gamma \eta_0$ (Abbildung 7). Für alle $i = 0, \dots, T$ ist

$$L(\eta_i) = d(p_i, q_i) \leq \max\{d(x, y), d(\gamma x, \gamma y)\} + 8\delta \leq 2\mathcal{R} + 8\delta.$$

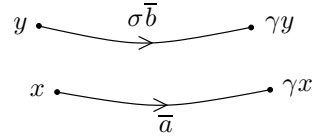
Für jedes $i \in \{0, \dots, T-1\}$ bilden $\eta_i, \eta_{i+1}, c_a|_{[\frac{i}{T}, \frac{i+1}{T}]}$ und $c_b|_{[r+\frac{i}{T}, r+\frac{i+1}{T}]}$ ein Viereck aus kürzesten Geodäten mit Seitenlängen $\leq 2\mathcal{R} + 8\delta = L_1$. Gemäss Satz A.4 gibt es somit für jedes $i \in \{0, \dots, T-1\}$ eine stetige Abbildung $\bar{V}_i : [\frac{i}{T}, \frac{i+1}{T}] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $\bar{V}_i(\frac{i}{T}, \cdot) = \eta_i$, $\bar{V}_i(\frac{i+1}{T}, \cdot) = \eta_{i+1}$ sowie $\bar{V}_i(t, 0) = c_a(t)$, $\bar{V}_i(t, 1) = c_b(r+t)$ und $L(s \mapsto \bar{V}_i(t, s)) \leq C_1$ für alle $t \in [\frac{i}{T}, \frac{i+1}{T}]$. Setzt man



alle \overline{V}_i zusammen, erhält man eine stetige Abbildung $\overline{V} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\overline{V}(1, \cdot) = \eta_T = \gamma\eta_0 = \gamma\overline{V}(0, \cdot)$, $\overline{V}(t, 0) = c_a(t) = \overline{a}(t)$ und $\overline{V}(t, 1) = c_b(r+t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto \overline{V}(t, s)) \leq C_1$.

$V : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M$, $V := \pi \circ \overline{V}$ ist stetig mit $V(0, s) = V(1, s)$ für alle $s \in [0, 1]$, $V(t, 0) = a(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto V(t, s)) \leq C_1$. Weiter gibt es $u \in [0, 1]$ mit $\pi \circ c_b(r+t) = b(u+t \bmod 1)$ für alle $t \in [0, 1]$. Somit ist $V(t, 1) = b(u+t \bmod 1)$ für alle $t \in [0, 1]$. V induziert eine stetige Abbildung $W : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow M$ mit $W(\varphi(t), s) = V(t, s)$ für alle $t, s \in [0, 1]$. Es gelten $W(t, 0) = f(t)$ und $W(t, 1) = g(u+t \bmod 1)$ für alle $t \in S^1$ sowie $\sup_{t \in S^1} L(s \mapsto W(t, s)) \leq C_1 \leq \mathcal{B}_{27}$. f und g sind C^∞ -geschlossene Geodäten, da c_a, c_b Quasi-Achsen von γ sind.

Fall 2: Sei γ elliptisch. Setze $x := \overline{a}(0)$, $z := \overline{b}(0)$, dann ist $d(x, \gamma x) = d(z, \gamma z) = \min d_\gamma \leq 6\delta$. Nach Satz 4.2 gibt es $\sigma \in Z(\gamma)$ mit $d(x, \sigma z) \leq 6\delta + \mathcal{B}_3$. Setze $y := \sigma z$. $\sigma \overline{b} : [0, 1] \longrightarrow X$ ist eine kürzeste Geodäte von y nach $\sigma \gamma z = \gamma y$. Es gelten:



$$\begin{aligned} L(\overline{a}) &= d(x, \gamma x) \leq 6\delta \leq L_2, \\ L(\sigma \overline{b}) &= L(\overline{b}) = d(z, \gamma z) \leq 6\delta \leq L_2, \\ d(x, y) &= d(\gamma x, \gamma y) = d(x, \sigma z) \leq \mathcal{B}_3 + 6\delta = L_2. \end{aligned}$$

Gemäss Satz A.4 existiert eine Homotopie $\overline{V} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$, so dass $\overline{V}(\cdot, 0) = \overline{a}$, $\overline{V}(\cdot, 1) = \sigma \overline{b}$ und $\gamma \overline{V}(0, s) = \overline{V}(1, s)$ für alle $s \in [0, 1]$ sowie $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto \overline{V}(t, s)) \leq C_2$.

$V : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M$, $V := \pi \circ \overline{V}$ ist stetig mit $V(\cdot, 0) = a$, $V(\cdot, 1) = b$ und $V(0, s) = V(1, s)$ für alle $s \in [0, 1]$ sowie $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto V(t, s)) \leq C_2$. V induziert eine stetige Abbildung $W : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow M$ mit $W(\varphi(t), s) = V(t, s)$ für alle $t, s \in [0, 1]$. Es gelten $W(t, 0) = f(t)$, $W(t, 1) = g(t)$ für alle $t \in S^1$ und $\sup_{t \in S^1} L(s \mapsto W(t, s)) \leq C_2 \leq \mathcal{B}_{27}$. Aus Lemma 2.2 folgt ausserdem, dass f und g C^∞ -geschlossene Geodäten sind. \square

Als nächstes untersuchen wir Repräsentanten für γ und γ^n . Dafür brauchen wir eine Abschätzung der Ordnung von elliptischen Isometrien.

Lemma 5.7. *Für jede elliptische Isometrie $\alpha \in \Gamma$ gilt $\text{ord}(\alpha) \leq \mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A} = \mathcal{A}(N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta) \in \mathbb{N}^*$.*

Beweis. Setze $r := 8\delta$ und $\mathcal{A} := \Omega(r)$, wobei $\Omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}^*$ die Abbildung aus Satz A.3 ist.

Seien $\alpha \in \Gamma$ elliptisch, $x \in X$. Da α elliptisch ist, gilt $\text{ord}(\alpha) < \infty$. Somit ist $S := \{\alpha^z x \mid z \in \mathbb{Z}\}$ beschränkt. Gemäss Lemma 1.28 ist $\text{Cent}_0(S) \neq \emptyset$ und $\text{diam}(\text{Cent}_0(S)) \leq 8\delta$. Sei nun $y \in \text{Cent}_0(S)$. Wegen $\alpha(S) = S$ ist $\alpha(\text{Cent}_0(S)) = \text{Cent}_0(S)$ und somit $\{\alpha^z y \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Cent}_0(S)$. Also gilt $\text{diam}(\{\alpha^z y \mid z \in \mathbb{Z}\}) \leq 8\delta = r$. Nach Satz A.3 ist $\#\{\alpha^z y \mid z \in \mathbb{Z}\} \leq \Omega(r)$. Somit gibt es $n \neq m \in \{0, \dots, \Omega(r)\}$ mit $\alpha^n y = \alpha^m y$. Da Γ frei auf X operiert, folgt $\alpha^n = \alpha^m$.

Sei OE $n > m$. Setze $p := n - m$. Dann ist $p > 0$ und $\alpha^p = \text{id}$, also $\text{ord}(\alpha) \leq p \leq \Omega(r) = \mathcal{A}$. \square

Satz 5.8. *Seien $\gamma \in \Gamma$ und $[\gamma]$ die Konjugationsklasse von γ in Γ . Seien $f, g : S^1 = [0, 1] / \{0, 1\} \longrightarrow M$ stetige, proportional zur Bogenlänge parametrisierte Abbildungen und $n \in \mathbb{N}^*$, so dass gelten:*

- (a) *Die Homotopieklasse von f entspricht $[\gamma]$, diejenige von g entspricht $[\gamma^n]$,*
- (b) *f, g sind kürzeste Repräsentanten ihrer Homotopieklassen,*
- (c) *$n < \text{ord}(\gamma)$.*

Sei $f_n : S^1 \longrightarrow M$ die n -fache Verknüpfung von f , proportional zur Bogenlänge parametrisiert auf S^1 .

Dann gibt es eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Umparametrisierung $\hat{g} : S^1 \longrightarrow M$ von g und eine stetige Abbildung $A : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow M$ mit $A(t, 0) = f_n(t)$, $A(t, 1) = \hat{g}(t)$ für alle $t \in S^1$ und $\sup_{t \in S^1} L(s \mapsto A(t, s)) \leq \mathcal{B}_{28}$, wobei $\mathcal{B}_{28} = \mathcal{B}_{28}(N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta) \in \mathbb{R}_+$.

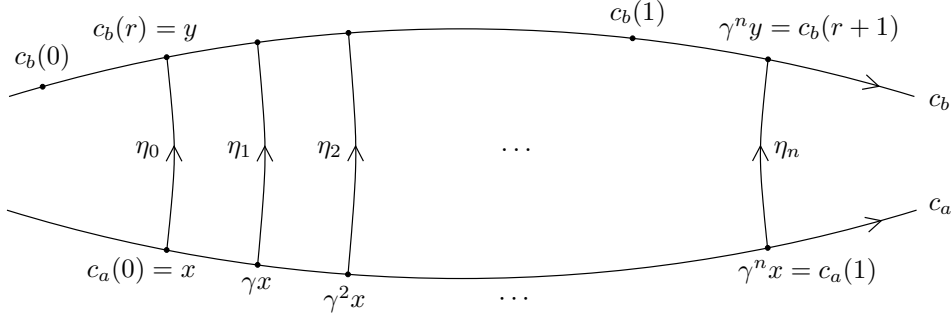
Beweis. Sei $\Omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}^*$ die Abbildung aus Satz A.3. Setze

$$J := \mathcal{F} \cdot (2\mathcal{Q} + \mathcal{G} + 16\delta) + 6\mathcal{Q} + 16\delta,$$

$$L := \frac{1}{\mathcal{E}} \cdot (J + 1),$$

$$I := (4L + 2) \cdot J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta + \mathcal{F} \cdot (\mathcal{G} + 8\mathcal{R}).$$

Sei \mathcal{A} die Konstante aus Lemma 5.7 und \mathcal{B}_3 diejenige aus Satz 4.2. Die Konstanten $\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{B}_3$ sind nur von $N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2, \delta$ abhängig. Setze $L_1 := I + 8\delta$, $L_2 := \mathcal{A} \cdot 9\delta + \mathcal{B}_3$, seien $C_1 = C_1(L_1; N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2)$ und $C_2 = C_2(L_2; N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2)$ die Konstanten aus Satz A.4. Setze weiter $\mathcal{B}_{28} := \max\{C_1, C_2\}$.

Abbildung 8: Fall 1 mit hyperbolischem γ

Seien $e, a, b : [0, 1] \rightarrow M$, $e := f \circ \varphi$, $a := f_n \circ \varphi$, $b := g \circ \varphi$. Nach (a) gibt es Lifte $\bar{e}, \bar{b} : [0, 1] \rightarrow X$ von e, b mit $\gamma \bar{e}(0) = \bar{e}(1)$, $\gamma^n \bar{b}(0) = \bar{b}(1)$. Wegen (b) sind \bar{e}, \bar{b} kürzeste Geodäten, und auf \bar{e} bzw. \bar{b} wird unter γ bzw. γ^n die minimale Verschiebung angenommen.

Fall 1: Sei γ hyperbolisch. Seien $c_e, c_b : \mathbb{R} \rightarrow X$ die Fortsetzungen von \bar{e}, \bar{b} zu Riemannschen Geodäten. Nach Bemerkung 2.4 sind c_e bzw. c_b bis auf Parametrisierung Quasi-Achsen von γ bzw. γ^n , für alle $z \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $c_e(z+t) = \gamma^z c_e(t)$, $c_b(z+t) = \gamma^{nz} c_b(t)$. Setze $c_a : \mathbb{R} \rightarrow X$, $c_a(t) := c_e(nt)$ und $\bar{a} : [0, 1] \rightarrow X$, $\bar{a} := c_a|_{[0,1]}$ sowie $x := \bar{a}(0) = c_a(0)$. Dann ist \bar{a} ein Lift von a , und bis auf Parametrisierung ist c_a eine Quasi-Achse von γ . Wegen $d_H(\text{Im}(c_a), \text{Im}(c_b)) \leq 2\mathcal{R}$ gibt es $y \in \text{Im}(c_b)$ mit $d(x, y) \leq 2\mathcal{R}$. Sei $r \in \mathbb{R}$ so, dass $y = c_b(r)$.

Für jedes $z \in \{0, \dots, n-1\}$ sei $\eta_z : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $c_a(\frac{z}{n}) = \gamma^z x$ nach $c_b(r + \frac{z}{n})$, setze $\eta_n := \gamma^n \eta_0$ (Abbildung 8). Mit Satz 2.17 folgt für alle $z = 0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} L(\eta_z) &= d(\gamma^z x, c_b(r + \frac{z}{n})) \\ &\leq (4L + 2)J + 14\mathcal{R} + 8\mathcal{Q} + 24\delta + \mathcal{F} \cdot [6\mathcal{R} + \mathcal{G} + 2\mathcal{R}] \\ &= I = L_1 - 8\delta. \end{aligned}$$

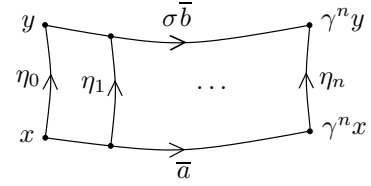
c_a, c_b sind eingeschränkt auf jedes Intervall der Länge $\frac{1}{n}$ minimierend. Wie im Beweis von Satz 5.6 findet man mit Satz A.4 für jedes $z \in \{0, \dots, n-1\}$ eine stetige Abbildung $\bar{V}_z : [\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $\bar{V}_z(\frac{z}{n}, \cdot) = \eta_z$ und $\bar{V}_z(\frac{z+1}{n}, \cdot) = \eta_{z+1}$, $\bar{V}_z(t, 0) = c_a(t)$ und $\bar{V}_z(t, 1) = c_b(r+t)$ für alle $t \in [\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}]$.

sowie $\sup_{t \in [0,1]} L(s \mapsto \bar{V}_z(t, s)) \leq C_1$. Setzt man alle \bar{V}_z zusammen, ergibt dies eine stetige Abbildung $\bar{V} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\bar{V}(1, \cdot) = \eta_n = \gamma^n \eta_0 = \gamma^n \bar{V}(0, \cdot)$ und $\bar{V}(t, 0) = c_a(t) = \bar{a}(t)$, $\bar{V}(t, 1) = c_b(r + t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $\sup_{t \in [0,1]} L(s \mapsto \bar{V}(t, s)) \leq C_1$.

$V : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M$, $V := \pi \circ \bar{V}$ ist stetig mit $V(0, s) = V(1, s)$ für alle $s \in [0, 1]$, $V(t, 0) = a(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $\sup_{t \in [0,1]} L(s \mapsto V(t, s)) \leq C_1$. Weiter gibt es $u \in [0, 1]$ mit $\pi \circ c_b(r + t) = b(u + t \bmod 1)$ für alle $t \in [0, 1]$. Somit ist $V(t, 1) = b(u + t \bmod 1)$ für alle $t \in [0, 1]$. V induziert eine stetige Abbildung $W : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow M$ mit $W(\varphi(t), s) = V(t, s)$ für alle $t, s \in [0, 1]$. Es gelten $W(t, 0) = f_n(t)$ und $W(t, 1) = g(u + t \bmod 1)$ für alle $t \in S^1$ sowie $\sup_{t \in S^1} L(s \mapsto W(t, s)) \leq C_1 \leq \mathcal{B}_{28}$.

Fall 2: Sei γ elliptisch. In diesem Fall gilt $\min d_\gamma \leq 6\delta$, $\min d_{\gamma^n} \leq 6\delta$ und $n < \text{ord}(\gamma) \leq \mathcal{A}$ nach (c) und Lemma 5.7, also $n \leq \mathcal{A} - 1$. Seien $c_e : \mathbb{R} \longrightarrow X$ die Fortsetzung von \bar{e} zu einer Riemannschen Geodäte und $\bar{a} : [0, 1] \longrightarrow X$, $\bar{a}(t) := c_e(nt)$. \bar{a} ist ein Lift von a .

Setze $x := \bar{a}(0) = c_e(0)$ und $z := \bar{b}(0)$. Dann gelten $d(x, \gamma x) \leq 6\delta$ und $d(z, \gamma^n z) \leq 6\delta$ sowie $d(x, \gamma^n x) \leq n \cdot d(x, \gamma x) \leq (\mathcal{A} - 1) \cdot 6\delta$. Nach Satz 4.2 existiert nun ein $\sigma \in Z(\gamma^n)$, so dass $d(x, \sigma z) \leq \mathcal{A} \cdot 3\delta + \mathcal{B}_3$. Setze $y := \sigma z$. Dann ist $\sigma \bar{b} : [0, 1] \longrightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von y nach $\sigma \gamma^n z = \gamma^n y$. Es gilt



$$d(x, y) = d(\gamma^n x, \gamma^n y) = d(x, \sigma z) \leq \mathcal{A} \cdot 3\delta + \mathcal{B}_3.$$

Für $z = 0, \dots, n - 1$ sei $\eta_z : [0, 1] \longrightarrow X$ eine kürzeste Geodäte von $\bar{a}(\frac{z}{n})$ nach $\sigma \bar{b}(\frac{z}{n})$, sei $\eta_n := \gamma^n \eta_0$. Dann gilt für alle $z \in \{0, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} L(\eta_z) &\leq d(\bar{a}(\frac{z}{n}), \bar{a}(0)) + d(\bar{a}(0), \sigma \bar{b}(0)) + d(\sigma \bar{b}(0), \sigma \bar{b}(\frac{z}{n})) \\ &\leq L(\bar{a}) + d(x, y) + L(\bar{b}) \\ &= n \cdot \min d_\gamma + d(x, y) + \min d_{\gamma^n} \\ &\leq (\mathcal{A} - 1) \cdot 6\delta + \mathcal{A} \cdot 3\delta + \mathcal{B}_3 + 6\delta = L_2. \end{aligned}$$

\bar{a} und $\sigma \bar{b}$ sind eingeschränkt auf jedes Intervall der Länge $\frac{1}{n}$ minimierend mit

$$\begin{aligned} L(\bar{a}|_{[\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}]}) &= \min d_\gamma \leq 6\delta \leq L_2, \\ L(\sigma \bar{b}|_{[\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}]}) &\leq L(\sigma \bar{b}) = \min d_{\gamma^n} \leq 6\delta \leq L_2. \end{aligned}$$

Gemäss Satz A.4 gibt es für jedes $z \in \{0, \dots, n-1\}$ eine stetige Abbildung $\bar{V}_z : [\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}] \times [0, 1] \longrightarrow X$, so dass $\bar{V}_z(\frac{z}{n}, \cdot) = \eta_z$, $\bar{V}_z(\frac{z+1}{n}, \cdot) = \eta_{z+1}$ sowie $\bar{V}_z(t, 0) = \bar{a}(t)$, $\bar{V}_z(t, 1) = \sigma \bar{b}(t)$ und $L(s \mapsto \bar{V}_z(t, s)) \leq C_2$ für alle $t \in [\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}]$. Man setzt nun alle \bar{V}_z zusammen und erhält somit eine stetige Abbildung $\bar{V} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\bar{V}(1, \cdot) = \eta_n = \gamma^n \eta_0 = \gamma^n \bar{V}(0, \cdot)$, $\bar{V}(t, 0) = \bar{a}(t)$ und $\bar{V}(t, 1) = \sigma \bar{b}(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto \bar{V}(t, s)) \leq C_2$.

$V : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M$, $V := \pi \circ \bar{V}$ ist stetig mit $V(0, s) = V(1, s)$ für alle $s \in [0, 1]$, $V(\cdot, 0) = a$ und $V(\cdot, 1) = b$ sowie $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto V(t, s)) \leq C_2$. V induziert eine stetige Abbildung $W : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow M$ mit $W(\varphi(t), s) = V(t, s)$ für alle $t, s \in [0, 1]$. Es gelten $W(t, 0) = f_n(t)$, $W(t, 1) = g(t)$ für alle $t \in S^1$ und $\sup_{t \in S^1} L(s \mapsto W(t, s)) \leq C_2 \leq \mathcal{B}_{28}$. \square

A Kompaktheitsargumente

Die Klasse der in Satz 0.1 betrachteten Mannigfaltigkeiten ist nach einem Satz von Gromov [G] relativ kompakt in einer grösseren Klasse von Räumen. Dies ermöglicht uns, zwei Abschätzungen zu finden, welche nicht von der Mannigfaltigkeit, sondern nur von ihren Parametern Dimension, Durchmesser, Injektivitätsradius und Krümmungsschranken abhängen. Die erste Abschätzung (Satz A.3) ist eine Aussage über endliche Geometrie, die für den Beweis von Satz 4.25 verwendet wird. In Satz A.4 wird eine Abschätzung der Länge von Homotopien bewiesen, die in Kapitel 5 gebraucht wird.

In diesem Anhang wird zuerst eine geeignete Version von Gromovs Resultat zitiert, danach werden die beiden Abschätzungen angegeben und bewiesen. Die betrachteten Räume müssen nicht Gromov-hyperbolisch sein.

Satz A.1. *Seien $N \in \mathbb{N}^*$, $D > 0$, $\kappa \geq 0$ und $\varrho \in (0, D]$. $\mathfrak{M}(N, D, \kappa, \varrho)$ bezeichne die Klasse aller kompakten N -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten M mit $\text{diam}(M) \leq D$, $|K_M| \leq \kappa$ und $\text{inj}(M) \geq \varrho$. Jede Folge in $\mathfrak{M}(N, D, \kappa, \varrho)$ enthält eine Teilfolge, die bezüglich der Lipschitz-Topologie gegen eine kompakte N -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit M mit einer C^1 -Metrik konvergiert.*

Beweis. [S], Appendices, Theorem 6.9 (vgl. auch [P], [GW]) und [Be].

Bemerkung A.2. Seien (Y, d) , (Z, d) metrische Räume, $f : Y \rightarrow Z$ stetig mit $\text{dil}(f) := \sup_{y \neq y' \in Y} \frac{d(f(y), f(y'))}{d(y, y')} < \infty$. Dann gilt $L(f \circ a) \leq \text{dil}(f) \cdot L(a)$ für jede Kurve a in Y . Dies wird im Beweis der folgenden Sätze oft verwendet.

Damit lässt sich die oben erwähnte Aussage über endliche Geometrie zeigen.

Satz A.3. *Für $N \in \mathbb{N}^*$, $D > 0$, $\varrho \in (0, D]$ und $\kappa_1 \leq \kappa_2 \in \mathbb{R}$ gibt es eine Abbildung $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$, so dass für alle $r \geq 0$ gilt: Sei M eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{diam}(M) \leq D$, $\text{inj}(M) \geq \varrho$, $\kappa_1 \leq K_M \leq \kappa_2$ und universeller Überlagerung $\pi : X \rightarrow M$. Dann folgt $\#\{z \in \overline{B}_r(x) \mid \pi(z) = m\} \leq \Omega(r)$ für alle $x \in X$, $m \in M$.*

Beweis. Nehmen wir an, die Behauptung gelte nicht. Dann gibt es ein $r \geq 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M_n mit $\text{diam}(M_n) \leq D$, $\text{inj}(M_n) \geq \varrho$, $\kappa_1 \leq K_{M_n} \leq \kappa_2$ und universeller Überlagerung $\pi_n : X_n \rightarrow M_n$ sowie $x_n \in X_n$ und $m_n \in M_n$ mit $\#\{z \in \overline{B}_r(x_n) \mid \pi_n(z) = m_n\} > n$.

Nach Satz A.1 gibt es eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und eine kompakte N -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit M mit C^1 -Metrik, so dass $M_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$ in der Lipschitz-Topologie. Sei OE $n_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze $\delta_{n_k} := d_L(M_{n_k}, M) + \frac{1}{n_k}$. Dann gelten $d_L(M_{n_k}, M) < \delta_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\delta_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Bi-Lipschitz-Homöomorphismus $f_{n_k} : M_{n_k} \longrightarrow M$ mit

$$|\ln \operatorname{dil}(f_{n_k})| + |\ln \operatorname{dil}(f_{n_k}^{-1})| \leq \delta_{n_k},$$

also

$$\operatorname{dil}(f_{n_k}), \operatorname{dil}(f_{n_k}^{-1}) \leq e^{\delta_{n_k}} =: \varepsilon_{n_k},$$

wobei $\varepsilon_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$. Gelte OE $\varepsilon_{n_k} \leq 2$, also $\operatorname{dil}(f_{n_k}), \operatorname{dil}(f_{n_k}^{-1}) \leq 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Setze $g_{n_k} := f_{n_1}^{-1} \circ f_{n_k} : M_{n_k} \longrightarrow M_{n_1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist jedes g_{n_k} ein Bi-Lipschitz-Homöomorphismus mit

$$\operatorname{dil}(g_{n_k}) \leq \operatorname{dil}(f_{n_1}^{-1}) \cdot \operatorname{dil}(f_{n_k}) \leq 4, \quad \operatorname{dil}(g_{n_k}^{-1}) \leq \operatorname{dil}(f_{n_k}^{-1}) \cdot \operatorname{dil}(f_{n_1}) \leq 4.$$

Setze $\mu_{n_k} := g_{n_k}(m_{n_k}) \in M_{n_1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da M_{n_1} kompakt ist, gibt es $\mu \in M_{n_1}$ und eine Teilfolge OE $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\mu_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu$. Sei $\xi \in X_{n_1}$ mit $\pi_{n_1}(\xi) = \mu$. Sei Γ_{n_1} die Decktransformationsgruppe von $\pi_{n_1} : X_{n_1} \longrightarrow M_{n_1}$. Da Γ_{n_1} total diskontinuierlich auf X_{n_1} operiert, ist

$$\Phi := \{\gamma \in \Gamma_{n_1} \mid \gamma(\overline{B}_{4r+4D+1}(\xi)) \cap \overline{B}_{4r+4D+1}(\xi) \neq \emptyset\}$$

endlich. Sei $\varphi := \#\Phi \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\sigma \in \overline{B}_{4r+4D+1}(\xi) \subset X_{n_1}$ so, dass $\pi_{n_1}(\sigma) = \mu = \pi_{n_1}(\xi)$. Dann gibt es genau ein $\gamma_\sigma \in \Gamma_{n_1}$ mit $\gamma_\sigma(\xi) = \sigma$. Die Abbildung

$$h : \{\sigma \in \overline{B}_{4r+4D+1}(\xi) \mid \pi_{n_1}(\sigma) = \mu\} \longrightarrow \Gamma_{n_1}, \quad \sigma \longmapsto \gamma_\sigma$$

ist injektiv mit $\operatorname{Im}(h) \subset \Phi$. Es folgt:

$$\#\{\sigma \in \overline{B}_{4r+4D+1}(\xi) \mid \pi_{n_1}(\sigma) = \mu\} \leq \#\Phi = \varphi. \quad (16)$$

Setze $\nu := \frac{1}{100} \cdot \min\{\varrho, 1\} \in (0, \frac{1}{100}]$. Wegen $\mu_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu$ gibt es $K_1 \in \mathbb{N}$ mit $d(\mu_{n_k}, \mu) \leq \nu$ für alle $k \geq K_1$. Sei $K_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_k \geq \varphi$ ist für alle $k \geq K_2$. Sei $k \geq \max\{K_1, K_2\}$. Dann ist $\tilde{m}_{n_k} := g_{n_k}^{-1}(\mu) = f_{n_k}^{-1} \circ f_{n_1}(\mu) \in M_{n_k}$ mit

$$d(m_{n_k}, \tilde{m}_{n_k}) = d(g_{n_k}^{-1}(\mu_{n_k}), g_{n_k}^{-1}(\mu)) \leq \operatorname{dil}(g_{n_k}^{-1}) \cdot d(\mu_{n_k}, \mu) \leq 4\nu,$$

da $k \geq K_1$. Es gibt $y_{n_k} \in \overline{B}_D(x_{n_k}) \subset X_{n_k}$ mit $\pi_{n_k}(y_{n_k}) = m_{n_k}$. Wegen $d(m_{n_k}, \tilde{m}_{n_k}) \leq 4\nu \leq \frac{1}{25} \cdot \varrho$ gibt es genau ein $\tilde{y}_{n_k} \in X_{n_k}$ mit $\pi_{n_k}(\tilde{y}_{n_k}) = \tilde{m}_{n_k}$ und $d(\tilde{y}_{n_k}, y_{n_k}) = d(\tilde{m}_{n_k}, m_{n_k}) \leq 4\nu$.

$$\begin{array}{ccc} (X_{n_k}, \tilde{y}_{n_k}) & & (X_{n_1}, \xi) \\ \downarrow \pi_{n_k} & & \downarrow \pi_{n_1} \\ (M_{n_k}, \tilde{m}_{n_k}) & \xrightarrow{g_{n_k}} & (M_{n_1}, \mu) \end{array}$$

$g_{n_k} : M_{n_k} \longrightarrow M_{n_1}$ ist ein Bi-Lipschitz-Homöomorphismus mit Bi-Lipschitz-Konstante ≤ 4 und $g_{n_k} \circ \pi_{n_k}(\tilde{y}_{n_k}) = \mu = \pi_{n_1}(\xi)$. Somit existiert ein Bi-Lipschitz-Homöomorphismus $G_{n_k} : X_{n_k} \longrightarrow X_{n_1}$ mit derselben Bi-Lipschitz-Konstante, mit $G_{n_k}(\tilde{y}_{n_k}) = \xi$ und mit $\pi_{n_1} \circ G_{n_k} = g_{n_k} \circ \pi_{n_k}$. Speziell ist $\text{dil}(G_{n_k}), \text{dil}(G_{n_k}^{-1}) \leq 4$.

Nach Annahme gibt es $z_0, z_1, \dots, z_{n_k} \in \overline{B}_r(x_{n_k}) \subset X_{n_k}$ verschieden mit $\pi_{n_k}(z_i) = m_{n_k}$ für alle $i = 0, \dots, n_k$. Wegen $y_{n_k} \in \overline{B}_D(x_{n_k})$ folgt für alle $i = 0, \dots, n_k$:

$$d(\tilde{y}_{n_k}, z_i) \leq d(\tilde{y}_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, z_i) \leq 4\nu + D + r.$$

Setze $\zeta_i := G_{n_k}(z_i) \in X_{n_1}$ für $i = 0, \dots, n_k$.

$$d(\zeta_i, \xi) = d(G_{n_k}(z_i), G_{n_k}(\tilde{y}_{n_k})) \leq \text{dil}(G_{n_k}) \cdot d(z_i, \tilde{y}_{n_k}) \leq 4D + 4r + 16\nu$$

für alle $i = 0, \dots, n_k$. Ausserdem muss $d(z_i, z_j) \geq 2\varrho$ sein für alle $i \neq j$, also

$$d(\zeta_i, \zeta_j) \geq \frac{d(G_{n_k}^{-1}(\zeta_i), G_{n_k}^{-1}(\zeta_j))}{\text{dil}(G_{n_k}^{-1})} \geq \frac{d(z_i, z_j)}{4} \geq \frac{1}{2}\varrho$$

für alle $i \neq j$. Weiter ist

$$\pi_{n_1}(\zeta_i) = \pi_{n_1} \circ G_{n_k}(z_i) = g_{n_k} \circ \pi_{n_k}(z_i) = g_{n_k}(m_{n_k}) = \mu_{n_k}$$

für alle $i = 0, \dots, n_k$ und $d(\mu_{n_k}, \mu) \leq \nu \leq \frac{1}{100} \cdot \varrho$, da $k \geq K_1$. Somit gibt es für jedes $i = 0, \dots, n_k$ genau ein $\vartheta_i \in X_{n_1}$ mit $\pi_{n_1}(\vartheta_i) = \mu$ und $d(\zeta_i, \vartheta_i) = d(\mu_{n_k}, \mu) \leq \nu$.

$$d(\vartheta_i, \vartheta_j) \geq d(\zeta_i, \zeta_j) - d(\zeta_i, \vartheta_i) - d(\zeta_j, \vartheta_j) \geq \frac{1}{2}\varrho - 2\nu \geq \frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{50}\varrho > 0$$

für alle $i \neq j$, insbesondere sind alle $\vartheta_0, \dots, \vartheta_{n_k}$ verschieden. Weiter ist

$$d(\xi, \vartheta_i) \leq d(\xi, \zeta_i) + d(\zeta_i, \vartheta_i) \leq 4D + 4r + 16\nu + \nu < 4D + 4r + 1$$

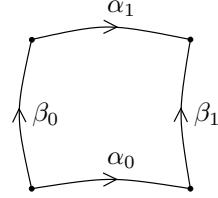
für alle $i = 0, \dots, n_k$. Somit ist

$$\#\{\sigma \in \overline{B}_{4r+4D+1}(\xi) \mid \pi_{n_1}(\sigma) = \mu\} \geq \#\{\vartheta_0, \dots, \vartheta_{n_k}\} \geq n_k + 1 > \varphi,$$

da $k \geq K_2$. Dies ist ein Widerspruch zu (16). \square

Die Abschätzung der Länge von Homotopien ist aufwändiger, beruht aber auch auf Satz A.1.

Satz A.4. Für $L \geq 0$, $N \in \mathbb{N}^*$, $D > 0$, $\varrho \in (0, D]$ und $\kappa_1 \leq \kappa_2 \in \mathbb{R}$ gibt es $C = C(L; N, D, \varrho, \kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}_+$, so dass gilt:



Sei M eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{diam}(M) \leq D$, $\text{inj}(M) \geq \varrho$, $\kappa_1 \leq K_M \leq \kappa_2$ und universeller Überlagerung $\pi : X \longrightarrow M$. Seien $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 : [0, 1] \longrightarrow X$ vier kürzeste Geodäten mit $\alpha_0(0) = \beta_0(0)$, $\alpha_0(1) = \beta_1(0)$, $\alpha_1(0) = \beta_0(1)$, $\alpha_1(1) = \beta_1(1)$ und $L(\alpha_0), L(\alpha_1), L(\beta_0), L(\beta_1) \leq L$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $A : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ mit $A(\cdot, 0) = \alpha_0$, $A(\cdot, 1) = \alpha_1$, $A(0, \cdot) = \beta_0$, $A(1, \cdot) = \beta_1$ und

$$\sup_{s \in [0, 1]} L(t \mapsto A(t, s)|_{t \in [0, 1]}) \leq C, \quad \sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto A(t, s)|_{s \in [0, 1]}) \leq C.$$

Beweis. Sei OE $L > 0$. Nehmen wir an, die Aussage des Satzes gelte nicht.

Schritt I) Dann gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine kompakte N -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M^i mit $\text{diam}(M^i) \leq D$, $\text{inj}(M^i) \geq \varrho$, $\kappa_1 \leq K_{M^i} \leq \kappa_2$ und universeller Überlagerung $\pi_i : X^i \longrightarrow M^i$ sowie kürzeste Geodäten $\alpha_0^i, \alpha_1^i, \beta_0^i, \beta_1^i : [0, 1] \longrightarrow X^i$ mit $\alpha_0^i(0) = \beta_0^i(0)$, $\alpha_0^i(1) = \beta_1^i(0)$, $\alpha_1^i(0) = \beta_0^i(1)$, $\alpha_1^i(1) = \beta_1^i(1)$ und $L(\alpha_0^i), L(\alpha_1^i), L(\beta_0^i), L(\beta_1^i) \leq L$, so dass keine stetige Abbildung $A^i : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X^i$ existiert mit $A^i(\cdot, 0) = \alpha_0^i$, $A^i(\cdot, 1) = \alpha_1^i$, $A^i(0, \cdot) = \beta_0^i$, $A^i(1, \cdot) = \beta_1^i$ und

$$\sup_{s \in [0, 1]} L(t \mapsto A^i(t, s)|_{t \in [0, 1]}) \leq i, \quad \sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto A^i(t, s)|_{s \in [0, 1]}) \leq i.$$

Da X^i die universelle Überlagerung von M^i ist, gelten $\kappa_1 \leq K_{X^i} \leq \kappa_2$ und $\text{inj}(X^i) \geq \varrho$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Nach Satz A.1 gibt es eine Teilfolge $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und eine kompakte N -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit M mit C^1 -Metrik, so dass $M^{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$ in der Lipschitz-Topologie. Sei OE $i_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze $\delta_{i_k} := d_L(M^{i_k}, M) + \frac{1}{i_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\delta_{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Bi-Lipschitz-Homöomorphismus $f_{i_k} : M^{i_k} \rightarrow M$ mit

$$|\ln \operatorname{dil}(f_{i_k})| + |\ln \operatorname{dil}(f_{i_k}^{-1})| \leq \delta_{i_k},$$

also

$$\operatorname{dil}(f_{i_k}), \operatorname{dil}(f_{i_k}^{-1}) \leq e^{\delta_{i_k}} =: \varepsilon_{i_k},$$

wobei $\varepsilon_{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$. Sei OE $\varepsilon_{i_k} \leq 2$, also $\operatorname{dil}(f_{i_k}), \operatorname{dil}(f_{i_k}^{-1}) \leq 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Setze $a_0^{i_k}, a_1^{i_k}, b_0^{i_k}, b_1^{i_k} : [0, 1] \rightarrow M^{i_k}$,

$$a_0^{i_k} := \pi_{i_k} \circ \alpha_0^{i_k}, \quad a_1^{i_k} := \pi_{i_k} \circ \alpha_1^{i_k}, \quad b_0^{i_k} := \pi_{i_k} \circ \beta_0^{i_k}, \quad b_1^{i_k} := \pi_{i_k} \circ \beta_1^{i_k}$$

und $A_0^{i_k}, A_1^{i_k}, B_0^{i_k}, B_1^{i_k} : [0, 1] \rightarrow M$,

$$A_0^{i_k} := f_{i_k} \circ a_0^{i_k}, \quad A_1^{i_k} := f_{i_k} \circ a_1^{i_k}, \quad B_0^{i_k} := f_{i_k} \circ b_0^{i_k}, \quad B_1^{i_k} := f_{i_k} \circ b_1^{i_k}.$$

$a_0^{i_k}, a_1^{i_k}, b_0^{i_k}, b_1^{i_k}$ sind Geodäten in M^{i_k} mit $a_0^{i_k}(0) = b_0^{i_k}(0)$, $a_0^{i_k}(1) = b_1^{i_k}(0)$, $a_1^{i_k}(0) = b_0^{i_k}(1)$, $a_1^{i_k}(1) = b_1^{i_k}(1)$ und $L(a_0^{i_k}), L(a_1^{i_k}), L(b_0^{i_k}), L(b_1^{i_k}) \leq L$. $A_0^{i_k}, A_1^{i_k}, B_0^{i_k}, B_1^{i_k}$ sind stetige Kurven in M mit $A_0^{i_k}(0) = B_0^{i_k}(0)$, $A_0^{i_k}(1) = B_1^{i_k}(0)$, $A_1^{i_k}(0) = B_0^{i_k}(1)$, $A_1^{i_k}(1) = B_1^{i_k}(1)$ und $L(A_0^{i_k}), L(A_1^{i_k}), L(B_0^{i_k}), L(B_1^{i_k}) \leq \operatorname{dil}(f_{i_k}) \cdot L \leq 2L$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei $M^{[0,1]}$ die Menge der stetigen Abbildungen $[0, 1] \rightarrow M$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2L}$. Für alle $t, s \in [0, 1]$ mit $|t - s| < \delta$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} d(A_0^{i_k}(t), A_0^{i_k}(s)) &= d(f_{i_k} \circ a_0^{i_k}(t), f_{i_k} \circ a_0^{i_k}(s)) \leq \operatorname{dil}(f_{i_k}) \cdot d(a_0^{i_k}(t), a_0^{i_k}(s)) \\ &\leq 2 \cdot L(a_0^{i_k}|_{[s,t]}) = 2 \cdot |t - s| \cdot L(a_0^{i_k}) < 2\delta L = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist die Menge $\{A_0^{i_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset M^{[0,1]}$ gleichgradig stetig auf $[0, 1]$. Und da M kompakt ist, ist für alle $t \in [0, 1]$ der Abschluss von $\{A_0^{i_k}(t) \mid k \in \mathbb{N}\}$ kompakt. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ([D], Chap. XII, Theorem 6.4) und [D], Chap. XII, 8.2(3) ist die Menge $\{A_0^{i_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in

$M^{[0,1]}$ bezüglich der metrischen Topologie. Somit gibt es eine Teilfolge OE $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und eine stetige Abbildung $A_0 : [0, 1] \longrightarrow M$, so dass $A_0^{i_k}$ gleichmässig gegen A_0 konvergiert für $k \rightarrow \infty$.

Führt man analog fort mit $B_0^{i_k}, A_1^{i_k}, B_1^{i_k}$, erhält man eine Teilfolge OE $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sowie stetige Abbildungen $A_1, B_0, B_1 : [0, 1] \longrightarrow M$ mit $A_0(0) = B_0(0)$, $A_0(1) = B_1(0)$, $A_1(0) = B_0(1)$, $A_1(1) = B_1(1)$ und $A_1^{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A_1$, $B_0^{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B_0$, $B_1^{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B_1$ jeweils gleichmässig auf $[0, 1]$. Da die Weglänge unterhalbstetig ist, gilt $L(A_0), L(A_1), L(B_0), L(B_1) \leq 2L$.

Schritt II) Setze $\nu := \frac{1}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\varrho}{L}, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, \frac{\pi}{L \cdot \sqrt{\kappa_2}}, 1, \frac{1}{L}\} \in (0, \frac{1}{100}]$, wobei $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} := \infty$ sei für $\kappa_2 \leq 0$. Es gibt $K_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i_k \geq K_1$, $t \in [0, 1]$ gilt:

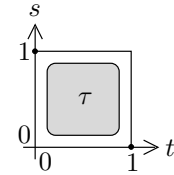
$$\begin{aligned} d(A_0^{i_k}(t), A_0(t)), d(A_1^{i_k}(t), A_1(t)) &\leq \frac{\nu}{4}, \\ d(B_0^{i_k}(t), B_0(t)), d(B_1^{i_k}(t), B_1(t)) &\leq \frac{\nu}{4}. \end{aligned} \tag{17}$$

Sei $i_l \geq K_1$. Da X^{i_l} einfach zusammenhängend ist, gibt es eine stetige Abbildung $\zeta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X^{i_l}$ mit $\zeta(\cdot, 0) = \alpha_0^{i_l}$, $\zeta(\cdot, 1) = \alpha_1^{i_l}$, $\zeta(0, \cdot) = \beta_0^{i_l}$, $\zeta(1, \cdot) = \beta_1^{i_l}$. $z : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M^{i_l}$, $z := \pi_{i_l} \circ \zeta$ ist stetig mit $z(\cdot, 0) = a_0^{i_l}$, $z(\cdot, 1) = a_1^{i_l}$, $z(0, \cdot) = b_0^{i_l}$, $z(1, \cdot) = b_1^{i_l}$.

Die Länge der (nur stetigen) Homotopie z muss nicht beschränkt sein. Deshalb nähern wir z an durch eine differenzierbare Homotopie. Da $[0, 1] \times [0, 1]$ mit der von \mathbb{R}^2 induzierten Struktur *keine* differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ist, schränken wir uns auf eine geeignete Teilmenge ein.

z ist gleichmässig stetig auf $[0, 1] \times [0, 1]$. Also existiert ein $\mu > 0$, so dass gilt: Für alle $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$ mit $|x - y| \leq \mu$ ist $d(z(x), z(y)) < \frac{\nu}{4}$. Sei OE $\mu \leq \frac{\nu}{4}$, also $0 < \mu \leq \frac{1}{400}$. (18)

Sei $\tau \subset [0, 1]^2$ abgeschlossen, so dass $[\mu, 1 - \mu]^2 \subset \overset{\circ}{\tau}$ ist ($\overset{\circ}{\tau}$ bezeichne das Innere von τ) und so dass τ mit der von \mathbb{R}^2 induzierten Struktur eine C^∞ -differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ist.



Es ist $z|_\tau \in C^0(\tau, M^{i_l})$. Nach [H], Chap. 2, Theorem 3.3 und Chap. 2, S. 35 unten ist $C^\infty(\tau, M^{i_l})$ dicht in $C^0(\tau, M^{i_l})$ in der C^0 -kompakt-offen-Topologie. Da τ kompakt ist, wird die C^0 -kompakt-offen-Topologie auf

$C^0(\tau, M^{i_l})$ induziert durch die Metrik $\text{dist}(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in \tau\}$ für $f, g \in C^0(\tau, M^{i_l})$. Somit gibt es ein $\tilde{w} \in C^\infty(\tau, M^{i_l})$ mit $\text{dist}(z|_\tau, \tilde{w}) \leq \frac{\nu}{4}$. Setze $w : [\mu, 1 - \mu]^2 \longrightarrow M^{i_l}$, $w := \tilde{w}|_{[\mu, 1 - \mu]^2}$. Dann ist $d(z(x), w(x)) \leq \frac{\nu}{4}$ für alle $x \in [\mu, 1 - \mu]^2$. (19)

Die Länge einer differenzierbaren Homotopie ist beschränkt, d. h. es gibt $\eta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\begin{aligned} L(t \mapsto w(t, s)|_{t \in [\mu, 1 - \mu]}) &\leq \eta & \forall s \in [\mu, 1 - \mu], \\ L(s \mapsto w(t, s)|_{s \in [\mu, 1 - \mu]}) &\leq \eta & \forall t \in [\mu, 1 - \mu]. \end{aligned}$$

Setze $W : [\mu, 1 - \mu]^2 \longrightarrow M$, $W := f_{i_l} \circ w$. W ist stetig mit

$$\begin{aligned} L(t \mapsto W(t, s)|_{t \in [\mu, 1 - \mu]}) &\leq \text{dil}(f_{i_l}) \cdot \eta \leq 2\eta & \forall s \in [\mu, 1 - \mu], \\ L(s \mapsto W(t, s)|_{s \in [\mu, 1 - \mu]}) &\leq \text{dil}(f_{i_l}) \cdot \eta \leq 2\eta & \forall t \in [\mu, 1 - \mu]. \end{aligned} \quad (20)$$

Wir leiten noch einige Ungleichungen her, die wir später brauchen. Für jedes $s \in [\mu, 1 - \mu]$ gilt nach (18) und (19):

$$d(w(\mu, s), b_0^{i_l}(s)) \leq d(w(\mu, s), z(\mu, s)) + d(z(\mu, s), z(0, s)) \leq \frac{\nu}{2},$$

mit (17) folgt:

$$\begin{aligned} d(W(\mu, s), B_0(s)) &\leq d(f_{i_l} \circ w(\mu, s), f_{i_l} \circ b_0^{i_l}(s)) + d(B_0^{i_l}(s), B_0(s)) \\ &\leq \text{dil}(f_{i_l}) \cdot d(w(\mu, s), b_0^{i_l}(s)) + d(B_0^{i_l}(s), B_0(s)) \\ &\leq 2 \cdot \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{4} < 2\nu. \end{aligned}$$

Man verfähre analog mit den anderen „Seiten“. Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} d(W(t, \mu), A_0(t)), d(W(t, 1 - \mu), A_1(t)) &< 2\nu & \forall t \in [\mu, 1 - \mu], \\ d(W(\mu, s), B_0(s)), d(W(1 - \mu, s), B_1(s)) &< 2\nu & \forall s \in [\mu, 1 - \mu]. \end{aligned} \quad (21)$$

Sei nun $t \in [0, \mu]$. Nach (18) ist

$$d(a_0^{i_l}(t), b_0^{i_l}(\mu)) \leq d(z(t, 0), z(0, 0)) + d(z(0, 0), z(0, \mu)) \leq \frac{\nu}{2},$$

mit (17) folgt:

$$\begin{aligned}
d(A_0(t), B_0(\mu)) &\leq d(A_0(t), A_0^{i_l}(t)) + d(f_{i_l} \circ a_0^{i_l}(t), f_{i_l} \circ b_0^{i_l}(\mu)) + d(B_0^{i_l}(\mu), B_0(\mu)) \\
&\leq d(A_0(t), A_0^{i_l}(t)) + \text{dil}(f_{i_l}) \cdot d(a_0^{i_l}(t), b_0^{i_l}(\mu)) + d(B_0^{i_l}(\mu), B_0(\mu)) \\
&\leq \frac{\nu}{4} + 2 \cdot \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{4} < 2\nu.
\end{aligned}$$

Man verfähre analog mit den anderen „Ecken“. Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}
d(A_0(t), B_0(\mu)), d(A_1(t), B_0(1-\mu)) &< 2\nu \quad \forall t \in [0, \mu], \\
d(A_0(t), B_1(\mu)), d(A_1(t), B_1(1-\mu)) &< 2\nu \quad \forall t \in [1-\mu, 1].
\end{aligned} \tag{22}$$

Schritt III) Setze $K_2 := \max\{K_1, L + 4\eta + 1\}$, und sei $i_j \geq K_2$. Setze $v : [\mu, 1-\mu]^2 \longrightarrow M^{i_j}$, $v := f_{i_j}^{-1} \circ W$. v ist stetig, und nach (20) gilt:

$$\begin{aligned}
L(t \mapsto v(t, s)_{t \in [\mu, 1-\mu]}) &\leq \text{dil}(f_{i_j}^{-1}) \cdot 2\eta \leq 4\eta \quad \forall s \in [\mu, 1-\mu], \\
L(s \mapsto v(t, s)_{s \in [\mu, 1-\mu]}) &\leq \text{dil}(f_{i_j}^{-1}) \cdot 2\eta \leq 4\eta \quad \forall t \in [\mu, 1-\mu].
\end{aligned} \tag{23}$$

Wir ergänzen nun v zu einer Homotopie zwischen $a_0^{i_j}, a_1^{i_j}, b_0^{i_j}, b_1^{i_j}$. Sei dazu $s \in [\mu, 1-\mu]$. Nach (17) und (21) ist

$$d(B_0^{i_j}(s), W(\mu, s)) \leq d(B_0^{i_j}(s), B_0(s)) + d(B_0(s), W(\mu, s)) < 3\nu,$$

also

$$\begin{aligned}
d(b_0^{i_j}(s), v(\mu, s)) &= d(f_{i_j}^{-1} \circ B_0^{i_j}(s), f_{i_j}^{-1} \circ W(\mu, s)) \\
&\leq \text{dil}(f_{i_j}^{-1}) \cdot d(B_0^{i_j}(s), W(\mu, s)) \\
&< 6\nu \leq \frac{6}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}.
\end{aligned} \tag{24}$$

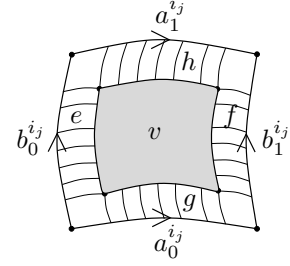
Somit gibt es genau eine kürzeste Geodäte $e_s : [0, \mu] \longrightarrow M^{i_j}$ von $b_0^{i_j}(s)$ nach $v(\mu, s)$ für jedes $s \in [\mu, 1-\mu]$, und die Abbildung $e : [0, \mu] \times [\mu, 1-\mu] \longrightarrow M^{i_j}$, $(t, s) \longmapsto e_s(t)$ ist stetig mit $e(0, s) = b_0^{i_j}(s)$ und $e(\mu, s) = v(\mu, s)$ für alle $s \in [\mu, 1-\mu]$. Analog zeigt man

$$d(b_1^{i_j}(s), v(1-\mu, s)) < \frac{6}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} \quad \forall s \in [\mu, 1-\mu],$$

$$\begin{aligned}
d(a_0^{ij}(t), v(t, \mu)) &< \frac{6}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} & \forall t \in [\mu, 1 - \mu], \\
d(a_1^{ij}(t), v(t, 1 - \mu)) &< \frac{6}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} & \forall t \in [\mu, 1 - \mu]
\end{aligned}$$

und konstruiert aus kürzesten Geodäten stetige Abbildungen

$$\begin{aligned}
f &: [1 - \mu, 1] \times [\mu, 1 - \mu] \longrightarrow M^{ij}, \\
g &: [\mu, 1 - \mu] \times [0, \mu] \longrightarrow M^{ij}, \\
h &: [\mu, 1 - \mu] \times [1 - \mu, 1] \longrightarrow M^{ij}
\end{aligned}$$



mit $f(1 - \mu, s) = v(1 - \mu, s)$ und $f(1, s) = b_1^{ij}(s)$ für alle $s \in [\mu, 1 - \mu]$, $g(t, 0) = a_0^{ij}(t)$ und $g(t, \mu) = v(t, \mu)$ für alle $t \in [\mu, 1 - \mu]$, $h(t, 1 - \mu) = v(t, 1 - \mu)$ und $h(t, 1) = a_1^{ij}(t)$ für alle $t \in [\mu, 1 - \mu]$.

Sei nun $t \in [0, \mu]$. Nach (17) und (22) ist

$$\begin{aligned}
d(a_0^{ij}(t), b_0^{ij}(\mu)) &= d(f_{ij}^{-1} \circ A_0^{ij}(t), f_{ij}^{-1} \circ B_0^{ij}(\mu)) \\
&\leq \text{dil}(f_{ij}^{-1}) \cdot [d(A_0^{ij}(t), A_0(t)) + d(A_0(t), B_0(\mu)) + d(B_0(\mu), B_0^{ij}(\mu))] \\
&< 2 \cdot \left[\frac{\nu}{4} + 2\nu + \frac{\nu}{4} \right] = 5\nu.
\end{aligned}$$

Da e_μ eine kürzeste Geodäte von $b_0^{ij}(\mu)$ nach $v(\mu, \mu)$ ist, folgt mit (24):

$$\begin{aligned}
d(a_0^{ij}(t), e(t, \mu)) &\leq d(a_0^{ij}(t), b_0^{ij}(\mu)) + d(e_\mu(0), e_\mu(t)) \\
&< 5\nu + d(b_0^{ij}(\mu), v(\mu, \mu)) \\
&< 11\nu \leq \frac{11}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Somit gibt es genau eine kürzeste Geodäte $m_t : [0, \mu] \longrightarrow M^{ij}$ von $a_0^{ij}(t)$ nach $e(t, \mu)$ für jedes $t \in [0, \mu]$, diese Geodäten hängen stetig von t ab, und $m_\mu = g(\mu, \cdot)$. Ausserdem ist $b_0^{ij}|_{[0, \mu]}$ eine Geodäte mit

$$L(b_0^{ij}|_{[0, \mu]}) = \mu \cdot L(b_0^{ij}) \leq \frac{\nu}{4} \cdot L \leq \frac{1}{400L} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} \cdot L < \varrho$$

nach (18). Also ist $b_0^{ij}|_{[0, \mu]}$ minimierend, und es gilt $m_0 = b_0^{ij}|_{[0, \mu]}$. Somit ist die Abbildung $m : [0, \mu] \times [0, \mu] \longrightarrow M^{ij}$, $(t, s) \longmapsto m_t(s)$ stetig mit

$m(t, 0) = a_0^{ij}(t)$, $m(t, \mu) = e(t, \mu)$ für alle $t \in [0, \mu]$ und $m(0, s) = b_0^{ij}(s)$, $m(\mu, s) = g(\mu, s)$ für alle $s \in [0, \mu]$. Analog zeigt man

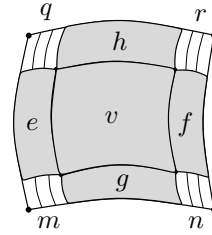
$$d(a_0^{ij}(t), f(t, \mu)) < \frac{11}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} \quad \forall t \in [1 - \mu, 1],$$

$$d(a_1^{ij}(t), e(t, 1 - \mu)) < \frac{11}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} \quad \forall t \in [0, \mu],$$

$$d(a_1^{ij}(t), f(t, 1 - \mu)) < \frac{11}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} \quad \forall t \in [1 - \mu, 1]$$

und konstruiert aus kürzesten Geodäten stetige Abbildungen

$$\begin{aligned} n &: [1 - \mu, 1] \times [0, \mu] \longrightarrow M^{ij}, \\ q &: [0, \mu] \times [1 - \mu, 1] \longrightarrow M^{ij}, \\ r &: [1 - \mu, 1] \times [1 - \mu, 1] \longrightarrow M^{ij} \end{aligned}$$



mit $n(t, 0) = a_0^{ij}(t)$, $n(t, \mu) = f(t, \mu)$ für alle $t \in [1 - \mu, 1]$ und $n(1 - \mu, s) = g(1 - \mu, s)$, $n(1, s) = b_1^{ij}(s)$ für alle $s \in [0, \mu]$, mit $q(t, 1 - \mu) = e(t, 1 - \mu)$, $q(t, 1) = a_1^{ij}(t)$ für alle $t \in [0, \mu]$ und $q(0, s) = b_0^{ij}(s)$, $q(\mu, s) = h(\mu, s)$ für alle $s \in [1 - \mu, 1]$, mit $r(t, 1 - \mu) = f(t, 1 - \mu)$, $r(t, 1) = a_1^{ij}(t)$ für alle $t \in [1 - \mu, 1]$ und $r(1 - \mu, s) = h(1 - \mu, s)$, $r(1, s) = b_1^{ij}(s)$ für alle $s \in [1 - \mu, 1]$.

Definiere nun $y : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M^{ij}$,

$$y(t, s) := \begin{cases} m(t, s) & \text{für } t, s \in [0, \mu] \\ g(t, s) & \text{für } t \in [\mu, 1 - \mu], s \in [0, \mu] \\ n(t, s) & \text{für } t \in [1 - \mu, 1], s \in [0, \mu] \\ e(t, s) & \text{für } t \in [0, \mu], s \in [\mu, 1 - \mu] \\ v(t, s) & \text{für } t, s \in [\mu, 1 - \mu] \\ f(t, s) & \text{für } t \in [1 - \mu, 1], s \in [\mu, 1 - \mu] \\ q(t, s) & \text{für } t \in [0, \mu], s \in [1 - \mu, 1] \\ h(t, s) & \text{für } t \in [\mu, 1 - \mu], s \in [1 - \mu, 1] \\ r(t, s) & \text{für } t, s \in [1 - \mu, 1]. \end{cases}$$

y ist stetig mit $y(\cdot, 0) = a_0^{ij}$, $y(\cdot, 1) = a_1^{ij}$, $y(0, \cdot) = b_0^{ij}$, $y(1, \cdot) = b_1^{ij}$.

Schritt IV) Wir schätzen die Länge der gefundenen Homotopie y ab. Nach Konstruktion und (24) gilt für alle $s \in [\mu, 1 - \mu]$:

$$L(t \mapsto y(t, s)|_{t \in [0, \mu]}) = L(e_s) = d(b_0^{ij}(s), v(\mu, s)) < \frac{6}{100}.$$

Analoge Abschätzungen gelten für die anderen „Seiten“. Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} L(t \mapsto y(t, s)|_{t \in [0, \mu]}) &< \frac{6}{100} & \forall s \in [\mu, 1 - \mu], \\ L(t \mapsto y(t, s)|_{t \in [1 - \mu, 1]}) &< \frac{6}{100} & \forall s \in [\mu, 1 - \mu], \\ L(s \mapsto y(t, s)|_{s \in [0, \mu]}) &< \frac{6}{100} & \forall t \in [\mu, 1 - \mu], \\ L(s \mapsto y(t, s)|_{s \in [1 - \mu, 1]}) &< \frac{6}{100} & \forall t \in [\mu, 1 - \mu]. \end{aligned} \tag{26}$$

Weiter gilt für alle $t \in [0, \mu]$ nach (25):

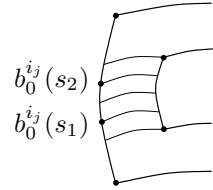
$$L(s \mapsto y(t, s)|_{s \in [0, \mu]}) = L(m_t) = d(a_0^{ij}(t), e(t, \mu)) < \frac{11}{100}.$$

Analoge Abschätzungen gelten für die anderen „Ecken“. Zusammen erhält man für alle $t \in [0, \mu] \cup [1 - \mu, 1]$:

$$L(s \mapsto y(t, s)|_{s \in [0, \mu]}), L(s \mapsto y(t, s)|_{s \in [1 - \mu, 1]}) < \frac{11}{100}. \tag{27}$$

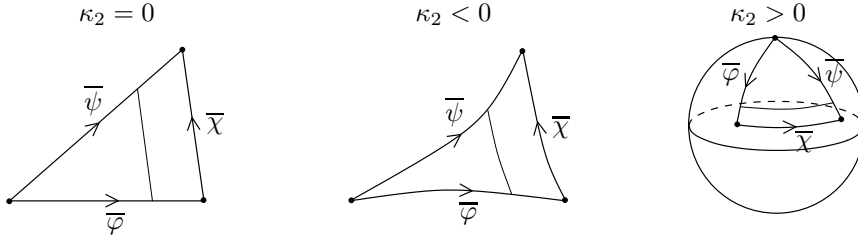
Die restlichen Abschätzungen sind komplizierter. Seien dazu $t \in [0, \mu]$ und $s_1 \leq s_2 \in [\mu, 1 - \mu]$ mit $|s_1 - s_2| \leq \nu$.

$$\begin{aligned} d(b_0^{ij}(s_1), b_0^{ij}(s_2)) &\leq |s_1 - s_2| \cdot L(b_0^{ij}) \leq \nu \cdot L \\ &\leq \frac{1}{100 \cdot L} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} \cdot L \\ &= \frac{1}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}. \end{aligned}$$



Nach (24) gelten:

$$d(b_0^{ij}(s_1), y(\mu, s_1)) = d(b_0^{ij}(s_1), v(\mu, s_1)) < \frac{6}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\},$$

Abbildung 9: Vergleichsdreiecke in $M^2_{\kappa_2}$

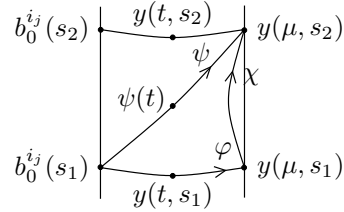
$$d(b_0^{ij}(s_2), y(\mu, s_2)) = d(b_0^{ij}(s_2), v(\mu, s_2)) < \frac{6}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$d(b_0^{ij}(s_1), y(\mu, s_2)) < \frac{7}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\},$$

$$d(y(\mu, s_1), y(\mu, s_2)) < \frac{13}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}.$$

Nach Definition von y ist $\varphi : [0, \mu] \rightarrow M^{ij}$, $\varphi(u) := y(u, s_1)$ eine kürzeste Geodäte von $y(0, s_1) = b_0^{ij}(s_1)$ nach $y(\mu, s_1) = v(\mu, s_1)$. Seien $\psi : [0, \mu] \rightarrow M^{ij}$ bzw. $\chi : [s_1, s_2] \rightarrow M^{ij}$ die eindeutigen kürzesten Geodäten von $b_0^{ij}(s_1)$ nach $y(\mu, s_2)$ bzw. von $y(\mu, s_1)$ nach $y(\mu, s_2)$. φ, ψ, χ bilden ein geodätisches Dreieck in M^{ij} mit Perimeter $< \frac{26}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}$. Mit dem Invers-Toponogov-Theorem ([Gr], Theorem 3.9), dem Beweis von Prop. II.1.7 in [BH_a] und dem Alexandrov-Lemma erhält man: Es existiert ein geodätisches Dreieck $\triangle(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\chi})$ in $M^2_{\kappa_2}$ mit gleichen Seitenlängen und $d(\varphi(t), \psi(t)) \leq d_{M^2_{\kappa_2}}(\bar{\varphi}(t), \bar{\psi}(t))$.



Es sind $L(\bar{\varphi}) = L(\varphi)$, $L(\bar{\psi}) = L(\psi)$, $L(\bar{\chi}) = L(\chi)$ alle $< \frac{13}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\}$. Also gilt offensichtlich $d_{M^2_{\kappa_2}}(\bar{\varphi}(t), \bar{\psi}(t)) \leq d_{M^2_{\kappa_2}}(\bar{\varphi}(\mu), \bar{\psi}(\mu)) = L(\bar{\chi})$ (im Fall $\kappa_2 > 0$ kann man annehmen, dass sich alles oberhalb der Äquatorebene abspielt, siehe Abbildung 9).

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} d(y(t, s_1), \psi(t)) &= d(\varphi(t), \psi(t)) \leq d_{M_{\kappa_2}^2}(\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t)) \\ &\leq L(\overline{\chi}) = d(y(\mu, s_1), y(\mu, s_2)) = d(v(\mu, s_1), v(\mu, s_2)). \end{aligned}$$

Analog zeigt man:

$$d(\psi(t), y(t, s_2)) \leq d(b_0^{ij}(s_1), b_0^{ij}(s_2)).$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} d(y(t, s_1), y(t, s_2)) &\leq d(y(t, s_1), \psi(t)) + d(\psi(t), y(t, s_2)) \\ &\leq d(v(\mu, s_1), v(\mu, s_2)) + d(b_0^{ij}(s_1), b_0^{ij}(s_2)). \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $s_1 \leq s_2 \in [\mu, 1 - \mu]$ mit $|s_1 - s_2| \leq \nu$, also ist

$$\begin{aligned} L(s \mapsto y(t, s)|_{s \in [\mu, 1-\mu]}) &= \sup_{\substack{\mu=s_0 \leq \dots \leq s_n=1-\mu \\ |s_k - s_{k-1}| \leq \nu}} \sum_{k=1}^n d(y(t, s_k), y(t, s_{k-1})) \\ &\leq \sup_{\substack{\mu=s_0 \leq \dots \leq s_n=1-\mu \\ |s_k - s_{k-1}| \leq \nu}} \sum_{k=1}^n d(v(\mu, s_k), v(\mu, s_{k-1})) \\ &\quad + \sup_{\substack{\mu=s_0 \leq \dots \leq s_n=1-\mu \\ |s_k - s_{k-1}| \leq \nu}} \sum_{k=1}^n d(b_0^{ij}(s_k), b_0^{ij}(s_{k-1})) \\ &= L(s \mapsto v(\mu, s)|_{s \in [\mu, 1-\mu]}) + L(s \mapsto b_0^{ij}(s)|_{s \in [\mu, 1-\mu]}) \\ &\leq 4\eta + L \end{aligned}$$

nach (23). Man verfähre analog mit den anderen „Seiten“. Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} L(s \mapsto y(t, s)|_{s \in [\mu, 1-\mu]}) &\leq 4\eta + L \quad \forall t \in [0, \mu] \cup [1 - \mu, 1], \\ L(t \mapsto y(t, s)|_{t \in [\mu, 1-\mu]}) &\leq 4\eta + L \quad \forall s \in [0, \mu] \cup [1 - \mu, 1]. \end{aligned} \tag{28}$$

Analog und mit (24), (18) zeigt man: Für $s \in [0, \mu]$ ist

$$\begin{aligned} L(t \mapsto y(t, s)|_{t \in [0, \mu]}) &\leq L(t \mapsto e(t, \mu)|_{t \in [0, \mu]}) + L(a_0^{ij}|_{[0, \mu]}) \\ &\leq d(b_0^{ij}(\mu), v(\mu, \mu)) + \mu \cdot L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{6}{100} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} + \frac{1}{400 \cdot L} \cdot \min\{\varrho, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, 1\} \cdot L \\
&< \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

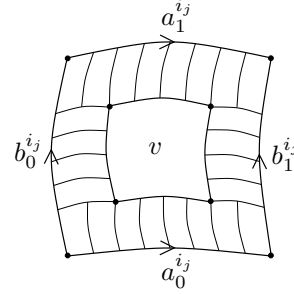
Man verfähre analog mit den anderen „Ecken“. Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}
L(t \mapsto y(t, s)|_{t \in [0, \mu]}) &< \frac{1}{10} \quad \forall s \in [0, \mu] \cup [1 - \mu, 1], \\
L(t \mapsto y(t, s)|_{t \in [1 - \mu, 1]}) &< \frac{1}{10} \quad \forall s \in [0, \mu] \cup [1 - \mu, 1].
\end{aligned} \tag{29}$$

Aus (23), (26), (27), (28) und (29) folgt nun:

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto y(t, s)) &\leq L + 4\eta + 1 \leq K_2 \leq i_j, \\
\sup_{s \in [0, 1]} L(t \mapsto y(t, s)) &\leq L + 4\eta + 1 \leq K_2 \leq i_j
\end{aligned}$$

nach Wahl von K_2, i_j . D. h. $y : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M^{i_j}$ ist stetig mit $y(\cdot, 0) = a_0^{i_j}$, $y(\cdot, 1) = a_1^{i_j}$, $y(0, \cdot) = b_0^{i_j}$, $y(1, \cdot) = b_1^{i_j}$ und $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto y(t, s)) \leq i_j$ sowie $\sup_{s \in [0, 1]} L(t \mapsto y(t, s)) \leq i_j$.



Schritt V) Nach Konstruktion ist $y(0, 0) = a_0^{i_j}(0) = \pi_{i_j} \circ \alpha_0^{i_j}(0)$. Liftet man y nach X^{i_j} , erhält man eine stetige Abbildung $\Upsilon : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X^{i_j}$ mit $\pi_{i_j} \circ \Upsilon = y$ und $\Upsilon(0, 0) = \alpha_0^{i_j}(0)$. Es gilt $\pi_{i_j} \circ \Upsilon(t, 0) = a_0^{i_j}(t) = \pi_{i_j} \circ \alpha_0^{i_j}(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $\Upsilon(0, 0) = \alpha_0^{i_j}(0)$. Aus [M], Chap. V, Lemma 3.2 folgt: $\Upsilon(t, 0) = \alpha_0^{i_j}(t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Analog zeigt man: $\Upsilon(0, s) = \beta_0^{i_j}(s)$ und $\Upsilon(1, s) = \beta_1^{i_j}(s)$ für alle $s \in [0, 1]$, $\Upsilon(t, 1) = \alpha_1^{i_j}(t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Somit ist $\Upsilon : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X^{i_j}$ stetig mit $\Upsilon(\cdot, 0) = \alpha_0^{i_j}$, $\Upsilon(\cdot, 1) = \alpha_1^{i_j}$, $\Upsilon(0, \cdot) = \beta_0^{i_j}$, $\Upsilon(1, \cdot) = \beta_1^{i_j}$ und ausserdem $\sup_{t \in [0, 1]} L(s \mapsto \Upsilon(t, s)) \leq i_j$, $\sup_{s \in [0, 1]} L(t \mapsto \Upsilon(t, s)) \leq i_j$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. \square

Literatur

- [A] J. M. ALONSO ET AL., *Notes on word hyperbolic groups*, in E. GHYS, A. HAEFLIGER, A. VERJOVSKY (editors), *Group theory from a geometrical viewpoint*, World Scientific, River Edge (New York), 1991, 3–63.
- [BGS] W. BALLMANN, M. GROMOV, V. SCHROEDER, *Manifolds of non-positive curvature*, Progress in Mathematics, Vol. 61, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [Be] M. BERGER, *Une borne inférieure pour le volume d'une variété riemannienne en fonction du rayon d'injectivité*, Ann. Inst. Fourier **30** (1980), 259–265.
- [B] N. BRADY, *Finite subgroups of hyperbolic groups*, Internat. J. Algebra Comput. **10** (2000), 399–405.
- [BH_a] M. R. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BH_o] M. R. BRIDSON, J. HOWIE, *Conjugacy of finite subsets in hyperbolic groups*, preprint, October 2003.
<http://www.ma.ic.ac.uk/~mbrids/papers/bhowie/BHijac.pdf>
 zu erscheinen in Internat. J. Algebra Comput.
- [BBI] D. BURAGO, Y. BURAGO, S. IVANOV, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 33, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 2001.
- [C] C. CHAMPETIER, *L'espace des groupes de type fini*, Topology **39** (2000), 657–680.
- [CDP] M. COORNAERT, T. DELZANT, A. PAPADOPOULOS, *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Math. **1441**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [D] J. DUGUNDJI, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

- [GH] E. GHYS, P. DE LA HARPE (editors), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, Vol. 83, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [GW] R. E. GREENE, H. WU, *Lipschitz convergence of Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. **131** (1988), 119–141.
- [G] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedric/Fernand Nathan, Paris, 1981.
- [Gr] K. GROVE, *Metric differential geometry*, in V. L. HANSEN (editor), *Differential geometry*, Lecture Notes in Math. **1263**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 171–227.
- [H] M. W. HIRSCH, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics **33**, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [KKS] T. KAPPELER, S. KUKSIN, V. SCHROEDER, *Poincaré inequalities for maps with target manifold of negative curvature*, Preprint 21-2002, University of Zürich.
<http://www.math.unizh.ch/fileadmin/math/preprints/21-02>
zu erscheinen in Mosc. Math. J.
- [M] W. S. MASSEY, *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics **127**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [P] S. PETERS, *Convergence of Riemannian manifolds*, Compositio Math. **62** (1987), 3–16.
- [S] T. SAKAI, *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 149, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 1996.